



**T**  
TROY

*Dr. René M. Schröder, Michael Böttcher*

# MATHEMATIK FORMELSAMMLUNG

SEKUNDARSTUFE II

14., vollständig  
überarbeitete  
Auflage

ISBN 978-3-947656-03-5

EUR 9,50

Ich bringe

**MENSCHEN**  
weiter!



Die Bundesagentur für Arbeit erbringt als größte Dienstleisterin für den deutschen Arbeitsmarkt kompetent und kundenorientiert umfassende Dienstleistungen für Bürgerinnen und Bürger, Unternehmen und Institutionen. Unsere rund 100.000 Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter zeichnet ein starkes Interesse an der Arbeit mit Menschen aus.

Bewerben Sie sich für die dualen Studiengänge

## **Arbeitsmarktmanagement (Bachelor of Arts)** **Beratung für Bildung,** **Beruf und Beschäftigung (Bachelor of Arts)**

Die Studiengänge an unserer staatlich anerkannten Hochschule der Bundesagentur für Arbeit (Mannheim oder Schwerin) stellen einen attraktiven Einstieg in unsere umfangreichen Aufgabenfelder dar.

### **Wir bieten Ihnen:**

- eine einzigartige Kombination aus Wirtschafts-, Sozial- und Rechtswissenschaften
- eine optimale Verbindung von fünf Studien- und vier Praxistimestern
- eine überdurchschnittliche Vergütung, zusätzliche Leistungen für Unterkunft und Verpflegung am Studienort und umfangreiche Sozialleistungen
- ein unbefristetes Arbeitsverhältnis nach erfolgreichem Abschluss

### **Wir erwarten von Ihnen:**

- Fachhoch- bzw. Hochschulreife oder einen vergleichbaren Bildungsabschluss
- Interesse am Umgang mit und der Beratung von Menschen
- die Bereitschaft, nach erfolgreichem Abschluss auch außerhalb Ihres Wohnortes zu arbeiten
- vertieftes Interesse an arbeitsmarktbezogenen, gesellschaftspolitischen und betriebswirtschaftlichen Zusammenhängen

### **Interessiert?**

Informieren Sie sich unter [www.arbeitsagentur.de/ba-studium](http://www.arbeitsagentur.de/ba-studium) oder [www.hdba.de/studium](http://www.hdba.de/studium).

Jetzt mobil das  
Karriereportal  
der BA besuchen.



Die Bundesagentur für Arbeit ist eine Arbeitgeberin, die Chancengleichheit und Vielfalt ihrer Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter fördert. Hierbei unterstützen wir auch die Beschäftigung von Menschen mit Behinderung.



**Bundesagentur für Arbeit**  
bringt weiter.

**HdBA**  
Hochschule der  
Bundesagentur für Arbeit  
University of Applied Labour Studies

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Vektorrechnung und analytische Geometrie</b>                    | <b>6</b>  |
| 1.1      | Vektorräume . . . . .  | 6         |
| 1.2      | Vektoren . . . . .   | 7         |
| 1.3      | Operationen mit Vektoren . . . . .                                 | 10        |
| 1.4      | Geraden . . . . .  | 12        |
| 1.5      | Ebenen . . . . .   | 13        |
| 1.6      | Kugeln . . . . .   | 16        |
| 1.7      | Lagebeziehungen . . . . .  | 17        |
| 1.8      | Schnittwinkel . . . . .  | 20        |
| 1.9      | Abstände . . . . .   | 21        |
| <b>2</b> | <b>Analysis</b>  | <b>23</b> |
| 2.1      | Folgen und Reihen . . . . .  | 23        |
| 2.2      | Funktionen . . . . .   | 27        |
| 2.3      | Differenzialrechnung . . . . .                                     | 31        |
| 2.4      | Kurvenuntersuchung . . . . .                                       | 34        |
| 2.5      | Tangente, Normale und Krümmungskreis . . . . .                     | 37        |
| 2.6      | Integralrechnung . . . . .   | 38        |
| 2.7      | Differenzialgleichungen . . . . .                                  | 46        |
| <b>3</b> | <b>Lineare Algebra</b>   | <b>48</b> |
| 3.1      | Matrizen . . . . .   | 50        |
| 3.2      | Rechnen mit Matrizen . . . . .                                     | 54        |
| 3.3      | Determinanten . . . . .  | 55        |
| 3.4      | Lineare Gleichungssysteme . . . . .                                | 58        |
| <b>4</b> | <b>Stochastik</b>  | <b>60</b> |
| 4.1      | Beschreibende Statistik . . . . .                                  | 61        |
| 4.2      | Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .               | 65        |
| 4.3      | Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten . . . . .                         | 68        |
| 4.4      | Kombinatorik . . . . .   | 70        |
| 4.5      | Zufallsvariable . . . . .  | 72        |
| 4.6      | Spezielle Verteilungsmodelle und Zentraler Grenzwertsatz . . . . . | 75        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.7      | Näherungsformeln für die Binomialverteilung . . . . .                | 79        |
| 4.8      | Konfidenzintervalle . . . . .  | 80        |
| 4.9      | Hypothesentests . . . . .  | 81        |
| <b>5</b> | <b>Aussagenlogik</b>   | <b>85</b> |
| <b>6</b> | <b>Komplexe Zahlen</b>   | <b>86</b> |
| 6.1      | Darstellungsweisen . . . . .   | 86        |
| 6.2      | Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .                               | 88        |
|          | <b>Wahrscheinlichkeitstabellen</b>                                   | <b>89</b> |
|          | Summierte Binomialverteilung ( $n = 1, 2, \dots, 7$ ) . . . . .      | 89        |
|          | Summierte Binomialverteilung ( $n = 8, 9, 10$ ) . . . . .            | 90        |
|          | Summierte Binomialverteilung ( $n = 15, 20$ ) . . . . .              | 91        |
|          | Summierte Binomialverteilung ( $n = 25, 50$ ) . . . . .              | 92        |
|          | Summierte Binomialverteilung ( $n = 50$ ) . . . . .                  | 94        |
|          | Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung . . . . . | 95        |
|          | Quantile $z_p$ der Standardnormalverteilung . . . . .                | 96        |
|          | <b>Stichwortverzeichnis</b>  | <b>98</b> |

**Hinweis:** Eine für alle Schulen einheitliche Symbolisierung ist leider nicht realisierbar. Insofern bitten wir um Verständnis, falls die Symbole dieser Formelsammlung nicht immer mit den Ihrigen übereinstimmen.

Sollten Sie Fehler finden oder Ergänzungsvorschläge haben, teilen Sie uns dieses bitte umgehend mit. Wir werden Ihre Hinweise schnellstmöglich einbinden. Eine aktuell überarbeitete Fassung dieser Formelsammlung finden Sie ständig unter **www.mathematik-formelsammlung.de**. Dort steht sie Ihnen als PDF zum kostenlosen Download zur Verfügung. Wir wünschen Ihnen weiterhin viel Erfolg auf Ihrem Weg zum Abitur.

# DUAL STUDIEREN MIT DER DEUTSCHEN BUNDESBANK

Als eine der größten Zentralbanken weltweit bieten wir Ihnen verschiedene duale Studiengänge im spannenden Umfeld von Wirtschaft, Finanzen und Bankenwelt. Praxis und Theorie Ihres Studiums sind eng miteinander verzahnt, so dass Sie das an der Hochschule Erlernte direkt in der Bundesbank anwenden können. Als Arbeitgeber im öffentlichen Dienst bieten wir Ihnen zudem ein festes Gehalt, unterstützende Begleitung während des Studiums und einen sicheren Arbeitsplatz nach dem Studium.

- **Zentralbankwesen / Central Banking (Beamtenlaufbahn)**
- **Betriebswirtschaftslehre**
- **Bank-BWL**
- **BWL mit Schwerpunkt Digitalisierungsmanagement**
- **Digital Business Management**
- **Angewandte Informatik**

Bewerbungsfristen und weitere Informationen finden Sie auf unserer Homepage unter [www.bundesbank.de/karriere](http://www.bundesbank.de/karriere), auf facebook und Instagram.



# 1 Vektorrechnung und analytische Geometrie

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $\overrightarrow{AB}$ :    | Vektor zwischen den Punkten $A$ und $B$                           |
| $\vec{o}$ :                | Nullvektor  |
| $ \vec{a} $ :              | Länge (Betrag) von Vektor $\vec{a}$                               |
| $\vec{a} \cdot \vec{b}$ :  | Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$                |
| $\vec{a} \times \vec{b}$ : | Vektorprodukt (Kreuzprodukt) der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ |
| $\vec{n}$ :                | Normalenvektor einer Geraden/Ebene                                |
| $\vec{n}_0$ :              | Normaleneinheitsvektor einer Geraden/Ebene                        |

## 1.1 Vektorräume

### Definition eines Vektorraumes:

Eine nichtleere Menge  $V$  heißt Vektorraum über den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , wenn

- (a) für deren Elemente (den Vektoren)  $\vec{a}, \vec{b}, \dots$  eine Addition  $\vec{a} + \vec{b} \in V$  und eine Multiplikation mit den reellen Zahlen  $r \cdot \vec{a} \in V$  definiert ist und
- (b) für beliebige  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$  und  $r, s \in \mathbb{R}$  gilt:
  - (1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (Kommutativgesetz der Addition)
  - (2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (Assoziativgesetz der Addition)
  - (3) Es gibt ein Element  $\vec{o} \in V$ , so dass für jeden  $\vec{a} \in V$  gilt:  
 $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$  (Nullelement der Addition)
  - (4) Zu jedem  $\vec{a} \in V$  existiert ein  $-\vec{a} \in V$ , so dass gilt:  
 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$  (Inverses Element der Addition)
  - (5)  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$  (Einselement)
  - (6)  $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$  (Assoziativgesetz der Multiplikation)
  - (7)  $(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$  (Distributivgesetz)
  - (8)  $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$  (Distributivgesetz)

**Linearkombination:**

Ein Vektor  $\vec{b}$  heißt Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  mit den Koeffizienten  $r_1, r_2, \dots, r_n$  ( $r_i \in \mathbb{R}$ ), wenn gilt:

$$\vec{b} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_n\vec{a}_n$$

**Lineare Unabhängigkeit:**

Die Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung  $r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_n\vec{a}_n = \vec{0}$  mit  $r_i \in \mathbb{R}$  nur für  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$  lösbar ist. Ist dies nicht der Fall, sind die Vektoren linear abhängig. Sind zwei/drei Vektoren linear abhängig, so bezeichnet man diese als kollinear/koplanar.

**Basis eines Vektorraumes:**

Die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  nennt man Basisvektoren des Vektorraumes  $V$ , wenn sie linear unabhängig sind und jeder Vektor  $\text{vec}(x) \in V$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  darstellbar ist.

**Dimension eines Vektorraumes:**

Die Dimension  $n$  eines Vektorraumes  $V$  ist gleich der Anzahl der Basisvektoren von  $V$ .

## 1.2 Vektoren

**Definitionen:**Vektor:

Eine Menge von Pfeilen, die die gleiche Richtung, die gleiche Länge (Betrag) und denselben Richtungssinn haben, stellen den gleichen Vektor dar. Jeder Pfeil dieser Menge ist ein Repräsentant des Vektors.

Nullvektor:

Der Nullvektor  $\vec{0}$  hat den Betrag 0 und eine unbestimmte Richtung.

Einheitsvektor:

Der Einheitsvektor hat den Betrag 1 und eine beliebige Richtung.

**Gegenvektor:**

Der Gegenvektor  $\vec{b}$  des Vektors  $\vec{a}$  hat die gleiche Richtung und die gleiche Länge wie  $\vec{a}$ , jedoch den entgegengesetzten Richtungssinn.

Es gilt:  $\vec{a} = -\vec{b}$

**Koordinatendarstellung eines Vektors:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad a_x, a_y, a_z: \text{ Koordinaten von } \vec{a}$$

**Komponentendarstellung eines Vektors:**

Sind  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen, dann lautet die Komponentendarstellung folgendermaßen:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3 \quad a_x \vec{e}_1, a_y \vec{e}_2, a_z \vec{e}_3: \text{ Komponenten von } \vec{a}$$

**Ortsvektor:**

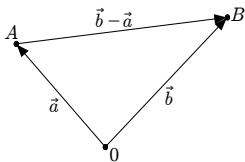
Der Ortsvektor  $\vec{p}$  des Punktes  $P(p_x; p_y; p_z)$  ist der Vektor zwischen dem Koordinatenursprung 0 und Punkt  $P$ :

$$\vec{p} = \vec{0P} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = p_x \vec{e}_1 + p_y \vec{e}_2 + p_z \vec{e}_3$$

**Vektor zwischen zwei Punkten:**

Vektor von Punkt  $A(a_x; a_y; a_z)$  zu Punkt  $B(b_x; b_y; b_z)$ :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{0B} - \vec{0A} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$





FINDE DEN  
**JOB**, DER  
WIRKLICH ZU DIR  
PASST.

BERUFE  
RADAR

Jetzt Stärkentest machen  
und Berufe entdecken!  
[KarriereKaserne.de](https://www.karrierekaserne.de)



BUNDESWEHR

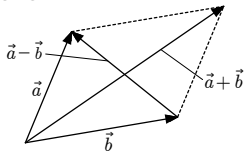
**Länge (Betrag) eines Vektors:**

$$\text{Länge des Vektors } \vec{a}: \quad |\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

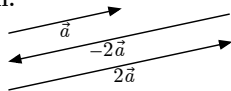
$$\text{Länge des Vektors } \vec{AB}: \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

**1.3 Operationen mit Vektoren****Addition und Subtraktion:**

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

**Multiplikation mit einer reellen Zahl:**

$$r\vec{a} = r \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_x \\ ra_y \\ ra_z \end{pmatrix}$$

**Skalarprodukt:**

Das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  ist eine reelle Zahl:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\begin{aligned} \text{Eigenschaften:} \quad & \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} && \text{mit } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ & \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} && \text{(Kommutativgesetz)} \\ & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} && \text{(Distributivgesetz)} \\ & r\vec{a} \cdot \vec{b} = r(\vec{a} \cdot \vec{b}) && \text{mit } r \in \mathbb{R} \\ & \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = |\vec{a}| \end{aligned}$$

**Vektorprodukt (Kreuzprodukt):**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  ergibt einen Vektor. Es gilt:

- (1)  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{a} \times \vec{b}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.
- (2)  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist jeweils orthogonal zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .
- (3)  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi(\vec{a}; \vec{b})$  mit  $\varphi(\vec{a}; \vec{b}) = \varphi$

Eigenschaften:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad (\text{Alternativgesetz})$$

$$r(\vec{a} \times \vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b}) \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) \quad (\text{Distributivgesetz})$$

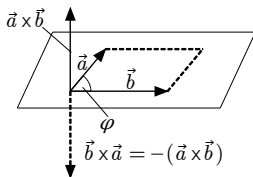
**Flächeninhalte:**

Flächeninhalt  $A$  des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

Flächeninhalt  $A$  des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

**Spatprodukt:**

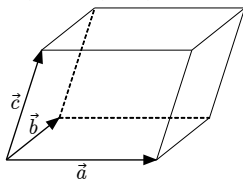
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z$$

$$= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

Das Spatprodukt ist eine reelle Zahl.

Der Betrag des Spatprodukts ist gleich dem Volumen  $V$  des von  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannten Spates:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$



## 1.4 Geraden

### Punkttrichtungsgleichung einer Geraden:

Gerade  $g$  durch den Punkt  $P$  mit dem Richtungsvektor  $\vec{u}$ :

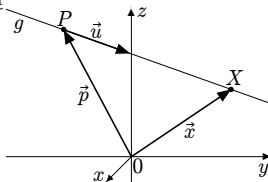
$$g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} = \overrightarrow{0P} + t\vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\vec{p}$ : Stützvektor (Ortsvektor von  $P$ )

Schreibweise mit Koordinaten für den  $xyz$ -Raum bzw.  $xy$ -Ebene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$



### Zweipunktgleichung einer Geraden:

Gerade  $g$  durch die Punkte  $P$  und  $Q$ :

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}) = \overrightarrow{0P} + t\overrightarrow{PQ} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\vec{p}, \vec{q}$ : Ortsvektoren von  $P$  und  $Q$

Schreibweise mit Koordinaten für den  $xyz$ -Raum bzw.  $xy$ -Ebene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \end{pmatrix}$$

### Normalenform einer Geraden:

$$g : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Gilt nur für die  $xy$ -Ebene!

$\vec{p}$ : Ortsvektor des Punktes  $P$  auf der Geraden  $g$

$\vec{n}$ : Normalenvektor von  $g$  ( $\vec{n}$  ist orthogonal zu  $g$  bzw. zum Richtungsvektor von  $g$ .)

Schreibweise mit Koordinaten:  $\left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = 0$

Koordinatengleichung:  $n_x x + n_y y = b$  mit  $b = p_x n_x + p_y n_y$

### Hessesche Normalenform einer Geraden:

$$g : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

Gilt nur für die  $xy$ -Ebene!

$$\text{mit } \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Es gilt:  $|\vec{n}_0| = 1$

Die Hessesche Normalenform ist ein Spezialfall der Normalenform. Es wird dabei der Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}_0$  der Geraden  $g$  verwendet.

## 1.5 Ebenen

### Punkttrichtungsgleichung einer Ebene:

Ebene  $E$  durch den Punkt  $P$  und den Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ :

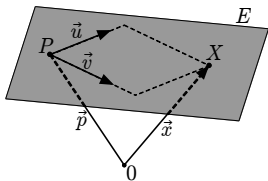
$\vec{u}, \vec{v}$ : werden auch Spannvektoren genannt und sind linear unabhängig

$\vec{p}$ : Stützvektor (Ortsvektor von  $P$ )

$$E : \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

Schreibweise mit Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$



### Dreipunktegleichung einer Ebene:

Ebene  $E$  durch die Punkte  $P, Q$  und  $R$ :

$$E : \vec{x} = \vec{p} + r(\vec{q} - \vec{p}) + s(\vec{r} - \vec{p}) = \vec{0}\vec{P} + r\vec{P}\vec{Q} + s\vec{P}\vec{R} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

Schreibweise mit Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} r_x - p_x \\ r_y - p_y \\ r_z - p_z \end{pmatrix}$$

### Normalenvektor einer Ebene:

Ein Normalenvektor  $\vec{n}$  der Ebene  $E$  steht senkrecht auf der Ebene  $E$ . Folglich steht der Normalenvektor senkrecht auf den beiden linear unabhängigen Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  der Ebene  $E$ .

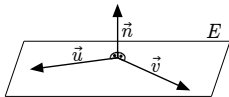
Berechnung eines Normalenvektors:

(a) mit den Gleichungen

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ und } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

(b) mit dem Vektorprodukt

$$(\text{Kreuzprodukt}) \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$



### Normalenform einer Ebene:

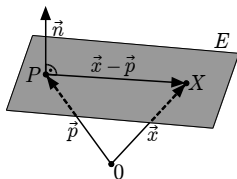
$\vec{p}$ : Ortsvektor des Punktes  $P$  auf der Ebene  $E$

$\vec{n}$ : Normalenvektor von  $E$

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Schreibweise mit Koordinaten:

$$\left[ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = 0$$



### Hessesche Normalenform einer Ebene:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0 \quad \text{mit } \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \quad \text{Es gilt: } |\vec{n}_0| = 1$$

Die Hessesche Normalenform ist ein Spezialfall der Normalenform. Es wird dabei ein Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}_0$  der Ebene  $E$  verwendet.

### Allgemeine Form (Koordinatengleichung):

$$E : Ax + By + Cz = D \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R} \text{ und } A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  ist ein Normalenvektor der Ebene  $E$ .

# *Wenn die Ferne ruft und die Welt zum Greifen nah ist!*

Duales Studium im gehobenen Auswärtigen Dienst  
und danach hauptberuflich Weltenbummler:in

- 3-jähriges duales Studium in Berlin
- Verbeamtung vom Anfang an
- Unser Arbeitsplatz: die Welt



Auswärtiges Amt



#weltweitwir



Wandelt man die Normalenform  $E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$  in die Koordinatengleichung einer Ebene um, so erhält man:

$$E : n_x x + n_y y + n_z z - n_x p_x - n_y p_y - n_z p_z = 0$$

## 1.6 Kugeln

**Allgemeine (vektorielle) Gleichung einer Kugel:**

Kugel  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M(m_x; m_y; m_z)$  und dem Radius  $r$ :

$$K : (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$$

$\vec{m}$  : Ortsvektor zum Mittelpunkt  $M$  der Kugel

Schreibweise mit Koordinaten: 
$$\left[ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \right]^2 = r^2$$

**Koordinatengleichung einer Kugel:**

Kugel  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M(m_x; m_y; m_z)$  und dem Radius  $r$ :

$$K : (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2$$

**Tangentialebene einer Kugel:**

Tangentialebene  $T$  an dem Berührungspunkt  $P(p_x; p_y; p_z)$  der Kugel  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M(m_x; m_y; m_z)$ :

$$T : (\vec{x} - \vec{m})(\vec{p} - \vec{m}) = r^2 \quad \text{oder} \quad T : (\vec{x} - \vec{p})(\vec{p} - \vec{m}) = 0$$

Koordinatengleichungen:

$$T : (x - m_x)(p_x - m_x) + (y - m_y)(p_y - m_y) + (z - m_z)(p_z - m_z) = r^2$$

$$T : (x - p_x)(p_x - m_x) + (y - p_y)(p_y - m_y) + (z - p_z)(p_z - m_z) = 0$$



## 1.7 Lagebeziehungen

### Punkt-Gerade:

Ein Punkt  $Q$  mit dem Ortsvektor  $\vec{q}$  liegt auf der Geraden  $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ , wenn es ein  $t \in \mathbb{R}$  gibt, so dass die Gleichung  $\vec{q} = \vec{p} + t\vec{u}$  erfüllt ist (Punktprobe).

### Punkt-Ebene:

Ein Punkt  $Q$  mit dem Ortsvektor  $\vec{q}$  liegt in der Ebene  $E : \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$ , wenn es ein  $r \in \mathbb{R}$  und ein  $s \in \mathbb{R}$  gibt, so dass die Gleichung  $\vec{q} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$  erfüllt ist (Punktprobe).

Ist die (Hessesche) Normalenform oder die Koordinatengleichung einer Ebene  $E$  gegeben, dann setzt man zur Überprüfung, ob der Punkt  $Q$  in  $E$  liegt,  $\vec{q}$  für  $vecx$  ein.

### Gerade-Gerade:

Es gibt im Raum vier Möglichkeiten der gegenseitigen Lage von zwei Geraden  $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$  und  $h : \vec{x} = \vec{q} + r\vec{v}$ :

(1)  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  sind linear abhängig. Gilt dazu:

- (a) Punkt  $P$  mit  $\vec{p}$  liegt auf  $h$   $\Rightarrow$   $g$  und  $h$  sind identisch  
 (b) Punkt  $P$  mit  $\vec{p}$  liegt nicht auf  $h$   $\Rightarrow$   $g$  und  $h$  sind parallel

(2)  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  sind linear unabhängig. Gilt dazu:

(a) Es existiert eine Lösung mit  $t, r \in \mathbb{R}$  für die Gleichung

$$\vec{p} + t\vec{u} = \vec{q} + r\vec{v} \Rightarrow g \text{ und } h \text{ schneiden sich in Punkt } S \text{ mit dem Ortsvektor } \vec{s} = \vec{p} + t\vec{u} = \vec{q} + r\vec{v}$$

(b) Fall a trifft nicht zu  $\Rightarrow$   $g$  und  $h$  sind zueinander windschief

**Gerade-Ebene:**

Es gibt drei Möglichkeiten der gegenseitigen Lage einer Geraden  $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$  und einer Ebene  $E : (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n}$ :

Hat die Gleichung  $(\vec{p} + t\vec{u} - \vec{q}) \cdot \vec{n}$

- (1) genau eine Lösung für  $t \Rightarrow g$  und  $E$  haben den Schnittpunkt  $S$  mit dem Ortsvektor  $\vec{s} = \vec{p} + t\vec{u}$
- (2) unendlich viele Lösungen für  $t \Rightarrow g$  liegt in der Ebene  $E$
- (3) keine Lösung für  $t \Rightarrow g$  ist parallel zu  $E$

**Gerade-Kugel:**

Es gibt drei Möglichkeiten der gegenseitigen Lage einer Geraden  $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$  und einer Kugel  $K : (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ :

Hat die Gleichung  $(\vec{p} + t\vec{u} - \vec{m})^2 = r^2$

- (1) zwei Lösungen ( $t_1$  und  $t_2$ ) für  $t \Rightarrow g$  durchstößt  $K$  in zwei Punkten  $S_1$  und  $S_2$  mit den Ortsvektoren  $\vec{s}_1 = \vec{p} + t_1\vec{u}$  und  $\vec{s}_2 = \vec{p} + t_2\vec{u}$
- (2) eine Lösung für  $t \Rightarrow g$  berührt  $K$  in dem Punkt  $S$  mit dem Ortsvektor  $\vec{s} = \vec{p} + t\vec{u}$
- (3) keine Lösung für  $t \Rightarrow K$  wird von  $g$  weder durchstoßen noch berührt

**Ebene-Ebene:**

Es gibt drei Möglichkeiten der gegenseitigen Lage der Ebenen  $E_1 : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$  und  $E_2 : (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{m} = 0$  (beide in Normalenform):

- (1) Die Normalenvektoren  $\vec{n}$  und  $\vec{m}$  sind linear abhängig. Gilt dazu:
  - (a) Punkt  $P$  mit dem Ortsvektor  $\vec{p}$  liegt auf  $E_2$  (Punktprobe)
    - $\Rightarrow E_1$  und  $E_2$  sind identisch
  - (b) Punkt  $P$  mit dem Ortsvektor  $\vec{p}$  liegt nicht auf  $E_2$  (Punktprobe)
    - $\Rightarrow E_1$  und  $E_2$  sind parallel
- (2) Die Normalenvektoren  $\vec{n}$  und  $\vec{m}$  sind linear unabhängig
  - $\Rightarrow E_1$  und  $E_2$  schneiden sich in einer Geraden



# Deine Zukunft startet 2023!

Du kommunizierst gerne mit Menschen, bist offen und hast Lust auf ein tolles Team? Dann bewirb dich bei der Techniker Krankenkasse als **Kaufmann/-frau im Gesundheitswesen**. Wir bieten dir eine interessante Ausbildung mit vielen Qualifizierungsmöglichkeiten.



## Was dich noch erwartet:

- 35,5 Stunden/Woche
- Flexible Arbeitszeiten
- 28 Tage Urlaub
- Faire Ausbildungsvergütung
- Weihnachtsgeld und mehr



Bewirb dich jetzt online unter:  
[tk.de/ausbildung-kig](https://tk.de/ausbildung-kig)

**Ebene-Kugel:**

Es gibt drei Möglichkeiten der gegenseitigen Lage einer Ebene  $E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$  und einer Kugel  $K : (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ :

Ist  $d(M, E) = |(\vec{m} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$  (Abstand des Kreismittelpunkts  $M$  von der Ebene  $E$ )

- (1) kleiner als  $r \quad \Rightarrow \quad E$  und  $K$  schneiden sich in einem Schnittkreis
- (2) gleich  $r \quad \Rightarrow \quad E$  berührt  $K$  in dem Punkt  $S$   
( $S$  ist der Schnittpunkt der Ebene  $E$  mit der Hilfsgeraden  $g : \vec{x} = \vec{m} + t\vec{n}_0$ )
- (3) größer als  $r \quad \Rightarrow \quad E$  und  $K$  schneiden und berühren sich nicht

**Kugel-Kugel:**

Es gibt drei Möglichkeiten der gegenseitigen Lage der Kugeln  $K_1$  und  $K_2$  mit den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$  und den Radien  $r_1$  und  $r_2$ :

- (1)  $|\overrightarrow{M_1M_2}| > r_1 + r_2$  oder  $|\overrightarrow{M_1M_2}| < |r_2 - r_1|$   
 $\Rightarrow$  kein Schnittpunkt
- (2)  $|\overrightarrow{M_1M_2}| = r_1 + r_2$  oder  $|\overrightarrow{M_1M_2}| = |r_2 - r_1|$   
 $\Rightarrow$  genau ein Schnittpunkt
- (3)  $|r_2 - r_1| < |\overrightarrow{M_1M_2}| < r_1 + r_2 \quad \Rightarrow \quad$  es ergibt sich ein Schnittkreis

**1.8 Schnittwinkel****Winkel zwischen zwei Vektoren:**

Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  schließen den Winkel  $\alpha$  ein. Es gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$$

**Schnittwinkel von zwei Geraden:**

Zwei Geraden mit den Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  schneiden sich. Für den Schnittwinkel  $\alpha$  gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z|}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

**Winkel zwischen Gerade und Ebene:**

Für den Winkel  $\alpha$  zwischen einer Geraden mit dem Richtungsvektor  $\vec{u}$  und einer Ebene mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$  gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z|}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

**Winkel zwischen zwei Ebenen:**

Für den Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Ebenen mit den Normalenvektoren  $\vec{n}$  und  $\vec{m}$  gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{|n_x m_x + n_y m_y + n_z m_z|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \cdot \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$

**1.9 Abstände****Abstand von zwei Punkten:**

Abstand  $d$  zwischen zwei Punkten  $P$  und  $Q$  ( $\vec{p}, \vec{q}$ : Ortsvektoren):

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2 + (q_z - p_z)^2}$$

**Abstand eines Punktes von einer Ebene:**

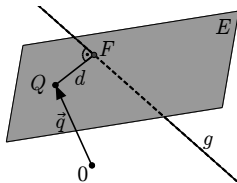
Abstand  $d$  eines Punktes  $Q$  mit dem Ortsvektor  $\vec{q}$  von einer Ebene  $E$ :

$$d(Q, E) = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0| \quad \text{mit } E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

### Abstand eines Punktes von einer Geraden:

Der Abstand  $d$  des Punktes  $Q$  mit dem Ortsvektor  $\vec{q}$  von der Geraden  $g$  lässt sich in drei Schritten ermitteln:

- (1) Aufstellen einer Gleichung für die Ebene  $E$ , die durch  $Q$  geht und orthogonal zu  $g$  ist.
- (2) Berechnung des Schnittpunktes  $F$  von  $g$  und  $E$  ( $F$  nennt man Fußpunkt des Lotes von  $Q$  auf  $g$ ).
- (3) Berechnung des Betrages von  $\overrightarrow{FQ}$ .  
Es gilt:  $d(Q, g) = |\overrightarrow{FQ}|$



### Abstand von zwei Geraden:

#### parallele Geraden:

Der Abstand von zwei parallelen Geraden ist gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes der einen Geraden zu der anderen Geraden.

⇒ Siehe „Abstand eines Punktes von einer Geraden“

#### windschiefe Geraden:

Gegeben sind zwei windschiefe Geraden  $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$  und  $h : \vec{x} = \vec{q} + r\vec{v}$ . Sind  $\vec{p}_0$  bzw.  $\vec{q}_0$  die Ortsvektoren eines beliebigen Punktes auf  $g$  bzw.  $h$  und ist  $\vec{n}_0$  der Normaleneinheitsvektor von  $g$  und  $h$  ( $\vec{n}_0 \perp \vec{u}$  und  $\vec{n}_0 \perp \vec{v}$ ), dann gilt für den Abstand  $d$ :

$$d(g, h) = |(\vec{q}_0 - \vec{p}_0) \cdot \vec{n}_0|$$

### Abstand einer Geraden zu einer parallelen Ebene:

Der Abstand einer Geraden zu einer ihr parallelen Ebene ist gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes auf der Geraden zu der Ebene.

⇒ Siehe „Abstand eines Punktes von einer Ebene“

### Abstand von zwei parallelen Ebenen:

Der Abstand von zwei parallelen Ebenen ist gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes der einen Ebene zu der anderen Ebene.

⇒ Siehe „Abstand eines Punktes von einer Ebene“

## 2 Analysis

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| $D$ :                               | Defintionsbereich der Funktion $f$                   |
| $f'$ :                              | 1. Ableitung der Funktion $f$                        |
| $f''$ :                             | 2. Ableitung der Funktion $f$                        |
| $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ :   | Grenzwert von $f$ für $x$ gegen $x_0$                |
| $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ : | linksseitiger Grenzwert von $f$ an der Stelle $x_0$  |
| $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ : | rechtsseitiger Grenzwert von $f$ an der Stelle $x_0$ |

### 2.1 Folgen und Reihen

**reelle Zahlenfolge:**

$(a_n) = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  mit  $n \in \mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$  und  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$

$a_1$ : Anfangsglied der Folge       $a_n$ : Bild von  $n$ ;  $n$ -tes Glied der Folge

**Partialsommenfolge/n-te Partialsomme:**

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

**Reihe:**

Man bezeichnet die Partialsommenfolge einer bestimmten Folge als die zu dieser Folge gehörende Reihe.

**unendliche Reihe:**  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

**Beschränktheit:** Die Folge  $(a_n)$  ist beschränkt, wenn gilt:  
 $|a_n| \leq S$  für alle  $a_n$        $S \in \mathbb{R}$  (Schranke)

**Monotonie:**

Die Folge  $(a_n)$  ist monoton wachsend (fallend), wenn gilt:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} \leq a_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$$

Die Folge  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend (fallend), wenn gilt:

$$a_{n+1} > a_n \quad (a_{n+1} < a_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$$

**Arithmetische Zahlenfolge:**

Definition:  $(a_n) = a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; \dots; a_1 + (n-1)d; \dots$

explizite Bildungsvorschrift:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

rekursive Bildungsvorschrift:  $a_{n+1} = a_n + d$   $a_1$  gegeben

Partialsumme:  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n \cdot a_1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d$

**Geometrische Zahlenfolge:**

Definition:  $(a_n) = a_1; a_1q; a_1q^2; \dots; a_1q^{n-1}; \dots$  ( $a_1 \neq 0, q \neq 0$ )

explizite Bildungsvorschrift:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

rekursive Bildungsvorschrift:  $a_{n+1} = a_n \cdot q$   $a_1$  gegeben

Partialsumme:  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$  (für  $q \neq 1$ )

**Unendliche geometrische Reihe:**

Partialsumme:  $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1} = \frac{a_1}{1 - q}$  ( $a_1 \neq 0, |q| < 1$ )

**Spezielle Partialsummen:**

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$s_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{i=1}^n 2i = n(n+1)$$

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$





# Mit Abstand der schönste Studienplatz!

Du willst etwas bewegen – und nicht nur etwas lernen?  
Wir denken gerne über den Tellerrand.  
Klingt gut? Dann komm zu uns an die Uni Kiel!  
Mit 190 Studiengängen bieten wir dir einen weiten Horizont.  
Von den Agrarwissenschaften bis zur Zahnmedizin.

[www.uni-kiel.de/studium](http://www.uni-kiel.de/studium)    / kieluni

$$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

### Grenzwert einer Folge:

Die Zahlenfolge  $(a_n)$  besitzt den Grenzwert  $g$ , wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $n_0$  gibt, so dass für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $|a_n - g| < \epsilon$ .

Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

### Konvergenz und Divergenz:

Eine Folge  $(a_n)$  ist konvergent, wenn sie einen Grenzwert  $g$  besitzt.

Eine Folge  $(a_n)$  ist divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

### Grenzwertsätze für Zahlenfolgen:

Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , dann gilt:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

### Spezielle Grenzwerte:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad \text{für } |a| < 1$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{für } a > 0 \quad (e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad (\text{eulersche Zahl})$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln(a) \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{a, b und c sind Nullfolgen})$$

## 2.2 Funktionen

### Definition:

Eine Funktion  $f$  ordnet jedem Element  $x$  aus einer Definitionsmenge  $D$  genau ein Element  $y$  einer Zielmenge  $Z$  zu. Die Wertemenge der Funktion  $f$  ist die Menge  $W$ , die aus den Werten (auch Bildern) von  $f$  besteht. Es gilt:  $W = \{f(x)|x \in D\}$  und  $W \subseteq Z$

### Schreibweise und Bezeichnungen:

$y = f(x)$  mit  $x \in D$   $\rightarrow$  Funktionsgleichung

$f : x \mapsto f(x)$  mit  $x \in D$  oder

$f : x \mapsto y$  mit  $x \in D$   $\rightarrow$  „ $x$  wird abgebildet auf  $f(x)$ “

### Surjektivität, Injektivität, Bijektivität:

Die Funktion  $f$  heißt *surjektiv*, wenn jedes Element der Zielmenge  $Z$  mindestens einmal als Funktionswert  $f(x)$  von einem Element aus der Definitionsmenge  $D$  angenommen wird.

Die Funktion  $f$  heißt *injektiv*, wenn jedes Element der Zielmenge  $Z$  höchstens einmal als Funktionswert  $f(x)$  von einem Element aus der Definitionsmenge  $D$  angenommen wird.

Die Funktion  $f$  heißt *bijektiv*, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

### Verkettungen von Funktionen:

Die Verkettung  $u \circ v : x \mapsto u(v(x))$  der zwei Funktionen  $u$  und  $v$  erhält man, indem man den Term  $v(x)$  für die Variable  $x$  der Funktion  $u$  einsetzt.

### Umkehrfunktion:

Eine Funktion  $f : x \mapsto y$  mit  $y = f(x)$  besitzt eine Umkehrfunktion  $\bar{f} : y \mapsto x$  mit  $x = \bar{f}(y)$ , wenn sie bijektiv ist. Es existiert also zu jedem Element  $y$  in der Zielmenge genau ein Element  $x$  in der Definitionsmenge. Die Schaubilder von  $y = f(x)$  und  $x = \bar{f}(y)$  sind identisch.  $y = \bar{f}(x)$  erhält man, indem man  $x$  und  $y$  in der Gleichung  $f(x) = y$  vertauscht und die Gleichung nach  $y$  auflöst. Das Schaubild

von  $y = \bar{f}(x)$  ist das Spiegelbild von  $y = f(x)$  an der 1. Winkelhalbierenden.

## Grenzwerte von Funktionen:

Grenzwert für  $x \rightarrow x_0$ :

$g$  heißt Grenzwert von  $f$  für  $x$  gegen  $x_0$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ und } x \neq x_0$$

Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$

Halbseitige Grenzwerte für  $x \rightarrow x_0$ :

$g$  heißt linksseitiger bzw. rechtsseitiger Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x_0$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon \quad \text{für alle } x \text{ mit } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ bzw. } x_0 < x < x_0 + \delta$$

Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = g$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = g$

Grenzwert für  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ :

$g$  heißt Grenzwert von  $f$  für  $x$  gegen plus unendlich bzw. minus unendlich, wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Stelle  $x_1$  existiert, so dass gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon \quad \text{für alle } x > x_1 \text{ bzw. } x < x_1$$

Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$

Regel von de l'Hospital:

Wenn (1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , (2)  $f$  und  $g$  differenzierbar mit

$g'(x) \neq 0$  ist und (3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die Regel ist ebenfalls anwendbar, wenn

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$



@viadrina

Photo: iStock



**duales  
Studium**

Studiere  
**Wirtschafts-  
prüfung** an der  
Viadrina

Grenzwertsätze für Funktionen:

Ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , dann gilt:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (\text{mit } b \neq 0)$$

**Stetigkeit einer Funktion:**Definition:

Eine Funktion  $f$  ist an der Stelle  $x_0$  stetig, wenn der Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x_0$  existiert und gleich dem Funktionswert  $f(x_0)$  ist. Es

gilt also:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

*Hinweis:* Das Schaubild einer stetigen Funktion kann man in einem Zug zeichnen.

Zwischenwertsatz:

Ist die Funktion  $f$  im Intervall  $[a, b]$  stetig und  $f(a) \neq f(b)$ , dann nimmt  $f$  in diesem Intervall alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  mindestens einmal an.

Nullstellensatz:

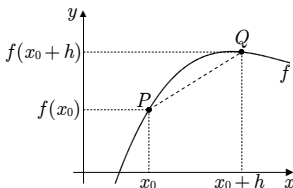
Ist die Funktion  $f$  im Intervall  $[a, b]$  stetig und haben  $f(a)$  und  $f(b)$  verschiedene Vorzeichen, dann gibt es mindestens eine Stelle  $x_0$  in diesem Intervall mit  $f(x_0) = 0$ .

## 2.3 Differenzialrechnung

### Differenzenquotient:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Der Differenzenquotient gibt die Steigung der Sekante durch die Punkte  $P(x_0; f(x_0))$  und  $Q(x_0 + h; f(x_0 + h))$  an.

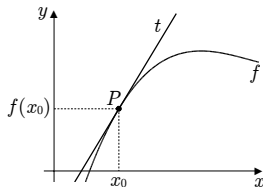


### Differenzialquotient (1. Ableitung):

Der Differenzialquotient von  $f$  an der Stelle  $x_0$  ist der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$  ist gleich der Steigung der Tangente  $t$  an den Graphen von  $f$  im Punkt  $P(x_0; f(x_0))$ .



### Differenzierbarkeit:

Eine Funktion heißt differenzierbar an der Stelle  $x_0$ , wenn  $f'(x_0)$  existiert.

### Höhere Ableitungen und ihre Schreibweisen:

1. Ableitung:  $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$

2. Ableitung:  $f''(x) = [f'(x)]' = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

$n$ -te Ableitung:  $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' = y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$

**Ableitungsregeln:**

Faktorregel:  $f(x) = c \cdot u(x)$        $f'(x) = c \cdot u'(x)$     ( $c \in \mathbb{R}$ )

Summenregel:  $f(x) = u(x) + v(x)$      $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Produktregel:  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$      $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel:  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$     mit  $v(x) \neq 0$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Kettenregel:  $f(x) = v(u(x))$        $f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$

Ableitung der Umkehrfunktion:

$$x = g(y) \text{ Umkehrfunktion von } y = f(x) \quad \Rightarrow \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

**Ableitungen spezieller Funktionen:**

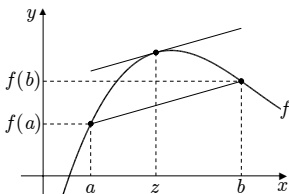
| $f(x)$         | $f'(x)$                    | $f(x)$                     | $f'(x)$                               |
|----------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| $c$ (konstant) | 0                          | $\cos(x)$                  | $-\sin(x)$                            |
| $x^n$          | $nx^{n-1}$                 | $\tan(x)$                  | $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ |
| $a^x$          | $a^x \cdot \ln(a)$         | $\cot(x)$                  | $-\frac{1}{\sin^2(x)}$                |
| $e^x$          | $e^x$                      | $\arcsin(x)$               | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$              |
| $\log_a(x)$    | $\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ | $\arccos(x)$               | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$             |
| $\ln(x)$       | $\frac{1}{x}$              | $\arctan(x)$               | $\frac{1}{1+x^2}$                     |
| $\sin(x)$      | $\cos(x)$                  | $\operatorname{arccot}(x)$ | $-\frac{1}{1+x^2}$                    |



### Mittelwertsatz der Differenzialrechnung:

Wenn  $f$  in  $[a; b]$  stetig und in  $]a; b[$  differenzierbar ist, dann gibt es mindestens eine Stelle  $z$  mit  $a < z < b$ , so dass gilt:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z)$$



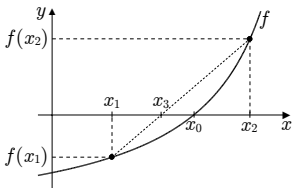
### Näherungslösungen von Nullstellen:

Regula falsi (Sekantenverfahren):

Gegeben sind zwei Näherungswerte  $x_1$  und  $x_2$  für  $x_0$  mit  $f(x_1) < 0$  und  $f(x_2) > 0$ .

$$x_3 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Das Verfahren wird mit  $x_3$  und  $x_1$  bzw.  $x_2$  fortgesetzt.



Newton'sches Näherungsverfahren:

$x_1$  sei eine Näherungslösung für  $x_0$ .

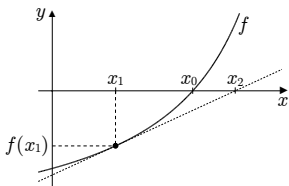
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad f'(x_1) \neq 0$$

→ Fortsetzung mit  $x_2$

Bedingungen:  $f'(x_i) \neq 0$

und  $\frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} < 1$  für alle  $x$

im betrachteten Intervall



### Satz von Taylor:

$f$  sei auf dem Intervall  $]x_0 - r; x_0 + r[$ ,  $r > 0$ , mindestens  $(n + 1)$ -mal differenzierbar. Dann gilt für alle  $x \in ]x_0 - r; x_0 + r[$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

Es gilt:  $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(h)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$  ( $h$  zwischen  $x$  und  $x_0$ )

## 2.4 Kurvenuntersuchung

### Symmetrie des Graphen von $f$ :

zur  $y$ -Achse:  $f(-x) = f(x)$  gilt für alle  $x \in D$

zum Ursprung  $(0; 0)$ :  $f(-x) = -f(x)$  gilt für alle  $x \in D$

zur Geraden  $g : x = x_0$ :  $f(x_0 - u) = f(x_0 + u)$   
gilt für alle  $u$  mit  $(x_0 \pm u) \in D$

zum Punkt  $P(x_0|y_0)$ :  $\frac{1}{2}[f(x_0 - u) + f(x_0 + u)] = f(x_0)$   
gilt für alle  $u$  mit  $(x_0 \pm u) \in D$

### Definitionslücken und Polstellen:

Gegeben ist eine gebrochenrationale Funktion:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Definitionslücke  $x_0$ :  $h(x_0) = 0$

Polstelle  $x_0$ :  $h(x_0) = 0$  und  $g(x_0) \neq 0$

Polstelle mit Vorzeichenwechsel:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$

Polstelle ohne Vorzeichenwechsel:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$

Die Gerade  $g : x = x_0$  nennt man dann eine vertikale Asymptote.

stetig behebbar Definitionslücke  $x_0$ :

(1)  $h(x_0) = g(x_0) = 0$  und zusätzlich

(2) Nach dem (ggf. mehrfachen) Kürzen von  $f$  durch  $(x - x_0)$  gilt für den neuen Nenner  $v^*(x_0) \neq 0$ .



**Business & Law School  
Campus Hamburg**

Hochschule für Management und Recht

# Deine Formel für Karriere & Zukunft

Wirtschaft studieren und durchstarten.



[bsp-campus-hamburg.de](https://bsp-campus-hamburg.de)

### Verhalten im Unendlichen:

Bestimmung von  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Bei einer gebrochenrationalen Funktion  $f$  mit Zählergrad  $m$  und Nennergrad  $n$  gilt für die Asymptote  $a(x)$ :

- (a)  $m < n \quad \Rightarrow \quad a(x) = 0 \quad (x\text{-Achse})$
- (b)  $m = n \quad \Rightarrow \quad a(x) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\text{Parallele zur } x\text{-Achse})$
- (c)  $m = n + 1 \quad \Rightarrow \quad a(x) \text{ ist eine lineare (schiefe) Asymptote}$
- (d)  $m > n + 1 \quad \Rightarrow \quad a(x) \text{ ist eine nichtlineare Asymptote}$

Bei (c) und (d) muss die Polynomdivision angewendet werden.

### Monotonieverhalten:

Wenn  $f$  in  $J = [a; b]$  differenzierbar ist und für alle  $x \in J$  gilt:

- $f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$  heißt im Intervall  $J$  streng monoton steigend
- $f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$  heißt im Intervall  $J$  streng monoton fallend
- $f'(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$  heißt im Intervall  $J$  monoton steigend
- $f'(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$  heißt im Intervall  $J$  monoton fallend

### Nullstellen (Schnittpunkt mit der x-Achse):

$x_0 \in D$  ist eine Nullstelle, wenn  $f(x_0) = 0$  ist. Zur Berechnung setzt man  $f(x) = 0$  und löst die Gleichung nach  $x$  auf.

### Globale Extrema:

Wenn für ein  $x_0 \in D$  und für alle  $x \in D$  gilt:  $f(x_0) \geq f(x)$ , dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein globales (absolutes) Maximum.

Wenn für ein  $x_0 \in D$  und für alle  $x \in D$  gilt:  $f(x_0) \leq f(x)$ , dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein globales (absolutes) Minimum.

### Lokale Extrema:

$f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) < 0 \Rightarrow P(x_0|f(x_0))$  ist ein Hochpunkt und  $f(x_0)$  ein lokales (relatives) Maximum.

$f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow P(x_0|f(x_0))$  ist ein Tiefpunkt und  $f(x_0)$  ein lokales (relatives) Minimum.

**Krümmungsverhalten:**

Wenn  $f$  im Intervall  $J = [a; b]$  zweimal differenzierbar ist und für alle  $x \in J$  gilt:

$f''(x) > 0 \Rightarrow$  Der Graph von  $f$  ist auf  $J$  eine Linkskurve bzw. konvex

$f''(x) < 0 \Rightarrow$  Der Graph von  $f$  ist auf  $J$  eine Rechtskurve bzw. konkav

**Wendepunkte und Sattelpunkte:**

$f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow P(x_0|f(x_0))$  ist ein Wendepunkt und  $x_0$  eine Wendestelle

$f'(x_0) = f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow P(x_0|f(x_0))$  ist ein Sattelpunkt (Spezialfall des Wendepunktes)

## 2.5 Tangente, Normale und Krümmungskreis

**Tangente und Normale:**

Tangente  $t$  zum Graphen von  $f$  im Punkt  $P(x_0|f(x_0))$ :

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Normale  $n$  zum Graphen von  $f$  im Punkt  $P(x_0|f(x_0))$ :

$$n(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \quad , f'(x_0) \neq 0 \text{ (senkrecht zur Tangente)}$$

**Krümmungskreis:**

$f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  Die Funktion  $f$  hat im Punkt  $P(x_0|f(x_0))$  einen Krümmungskreis mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $M(k_x|k_y)$ .

$$\text{Es gilt:} \quad r = \frac{(1 + f'(x_0))^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}$$

$$k_x = x_0 - \frac{f'(x_0)(1 + [f'(x_0)]^2)}{f''(x_0)} \quad k_y = f(x_0) + \frac{(1 + [f'(x_0)]^2)}{f''(x_0)}$$

**Schnitt von zwei Kurven:**

Schnittpunkt:  $f(x_0) = g(x_0) = s \Rightarrow$  Die Graphen von  $f$  und  $g$  schneiden sich im Punkt  $P(x_0|s)$

Schnittwinkel:  $\tan(\alpha) = \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)} \right|$

Spezialfälle:

Berührung:  $f(x_0) = g(x_0) = s$  und  $f'(x_0) = g'(x_0)$   
 $\Rightarrow$  Die Graphen von  $f$  und  $g$  berühren sich in Punkt  $P(x_0|s)$

Orthogonalität:  $f(x_0) = g(x_0) = s$  und  $f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$   
 $\Rightarrow$  Die Graphen von  $f$  und  $g$  schneiden sich im Punkt  $P(x_0|s)$  orthogonal zueinander

**2.6 Integralrechnung****Stammfunktion:**

$F$  heißt Stammfunktion von  $f$  auf einem Intervall  $I$ , wenn für alle  $x \in I$  gilt:  $F'(x) = f(x)$

**Unbestimmtes Integral:**

Das unbestimmte Integral von  $f$  ist die Menge aller Stammfunktionen von  $f$ .

Schreibweise:  $\int f(x)dx = F(x) + c$  ( $c$  ist die Integrationskonstante)

**Bestimmtes Integral:**  $\int_a^b f(x)dx$

**Integralfunktion:**

Ist die Funktion  $f : u \rightarrow f(u)$  im Intervall  $[a; b]$  stetig, dann heißt die Funktion  $F$  mit  $F(x) = \int_c^x f(u)du$ ,  $x, c \in [a; b]$  Integralfunktion von  $f$ .



# Eine Perspektive ist dir zu wenig?

Mach zwei draus! Du bist im Mathe-LK  
und machst dich stark für's Team?  
Dann kombiniere Studium und Praxis  
und starte in Köln mit einem dualen  
IT-Studium bei der nachhaltigsten  
Versicherung Deutschlands.



Alle Infos zu unseren dualen IT-Studiengängen  
und wie du dich bewerben kannst, findest du auf  
[gothaer.de/karriere](http://gothaer.de/karriere)

**Gothaer**

## Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

Wenn  $f$  auf dem Intervall  $[a; b]$  stetig ist und  $F$  eine Stammfunktion

zu  $f$  ist, dann gilt:  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$

## Eigenschaften des bestimmten Integrals:

$$(1) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$(2) \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

$$(3) \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad , a \leq b \leq c \text{ (Intervalladditivität)}$$

$$(4) \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx \quad \text{(Summenregel)}$$

$$(5) \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad , k \in \mathbb{R} \text{ (Faktorregel)}$$

$$(6) f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \text{(Monotonie)}$$

$$(7) m \leq f(x) \leq M \text{ für alle } x \in [a; b]$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad \text{(Abschätzbarkeit)}$$

## Integrationsregeln:

Partielle Integration:  $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

Substitutionsregel:  $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$

mit  $t = g(x)$  und  $dt = g'(x)dx$

Lineare Substitution:  $\int_a^b f(mx+b)dx = \left[\frac{1}{m} \cdot F(mx+b) + c\right]_a^b$

( $m$  und  $b$  sind konstant)



Logarithmische Integration:  $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln(|f(x)|)]_a^b$

### Spezielle Integrale:

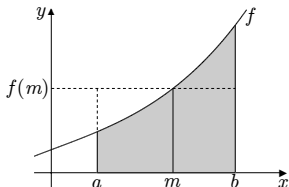
|   |   |
|---|---|
| $\int 0 dx = c$   | $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$<br>$= \ln \left( \left  x + \sqrt{x^2 - a^2} \right  \right) + c$                |
| $\int a dx = ax + c$  | $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$  |
| $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$   | $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$   |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln( x ) + c \quad (x \neq 0)$   | $\int \tan(x) dx = -\ln( \cos(x) ) + c$   |
| $\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$   | $\int \cot(x) dx = \ln( \sin(x) ) + c$  |
| $\int \log_a(x) dx$<br>$= \frac{1}{\ln(a)} (x \cdot \ln(x) - x) + c$  | $\int \sin^2(x) dx =$<br>$\frac{1}{2} (x - \sin(x) \cdot \cos(x)) + c$  |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$<br>$(a > 0, a \neq 1)$   | $\int \cos^2(x) dx$<br>$= \frac{1}{2} (x + \sin(x) \cdot \cos(x)) + c$  |
| $\int e^x dx = e^x + c$   | $\int \tan^2(x) dx = \tan(x) - x + c$   |
| $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx$<br>$= \frac{1}{a-b} \cdot \ln \left( \left  \frac{x-a}{x-b} \right  \right) + c$ | $\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln \left( \left  \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right  \right) + c$                 |
| $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan \left( \frac{x}{a} \right) + c$                          | $\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln \left( \left  \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  \right) + c$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$<br>$= \ln( x + \sqrt{x^2+a^2} ) + c$   | $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c$  |
| $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left( \left  \frac{x-a}{x+a} \right  \right) + c$          | $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$   |

## Mittelwertsatz der Integralrechnung:

Wenn  $f$  im Intervall  $[a; b]$  stetig ist, dann gilt für mindestens eine Stelle  $m$  mit  $a \leq m \leq b$ :

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(m) \quad \text{bzw.}$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(m) \cdot (b-a)$$



## Unter- und Obersumme:

Die Funktion  $f$  sei auf dem Intervall  $[a; b]$  stetig. Dieses Intervall wird in  $n$  Teilintervalle mit der gleichen Breite  $h = \frac{b-a}{n}$  zerlegt.

*Hinweise:* Die Teilintervalle können auch unterschiedliche Breiten haben.

Untersumme: (dunkelgraue Fläche)

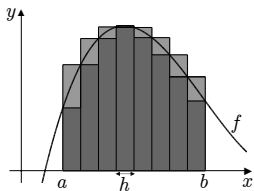
$$U_n = h \cdot m_1 + h \cdot m_2 + \dots + h \cdot m_n$$

Dabei ist  $m_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  das Minimum im  $i$ -ten Teilintervall.

Obersumme: (dunkel- + hellgraue Fläche)

$$O_n = h \cdot M_1 + h \cdot M_2 + \dots + h \cdot M_n$$

Dabei ist  $M_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  das Maximum im  $i$ -ten Teilintervall.



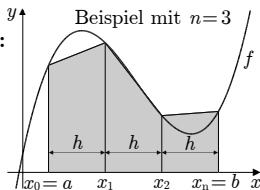
## Näherungsverfahren zur Berechnung bestimmter Integrale:

Trapezverfahren (Sekantenformel):

Mit  $h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{b-a}{n}$  erhält man für

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \text{folgende Näherung:}$$

$$A \approx h \cdot \left( \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right)$$



Simpsonsche Regel (Parabelformel):

Der Flächeninhalt  $A = \int_a^b f(x)dx$  wird durch  $n$  Teilflächen mit jeweils der Breite  $h = \frac{b-a}{n}$  unter Verwendung von Parabelbögen angenähert. Dabei gilt:  $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = b$  ( $n$  ist gerade)

$$A \approx \frac{h}{3} \cdot [f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot (f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})) + 4 \cdot (f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}))]$$

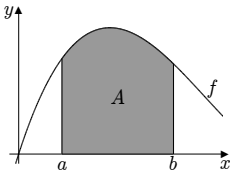
Keplersche Fassregel:

Ist  $n = 2$  ergibt sich aus der Simpsonschen Regel die Keplersche Fassregel als Spezialfall. Mit der Teilintervallbreite  $h = \frac{x_2 - x_0}{2}$  gilt:

$$A \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

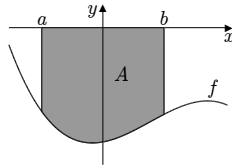
**Flächenberechnung mit Integralen:**Flächeninhalt zwischen Graph und  $x$ -Achse:

(1)  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a; b]$



$$\Rightarrow A = \int_a^b f(x)dx$$

(2)  $f(x) \leq 0$  für alle  $x \in [a; b]$

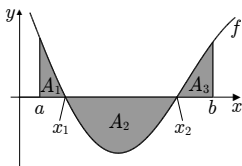


$$\Rightarrow A = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = - \int_a^b f(x)dx$$

(3)  $f$  hat die Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$  in  $[a; b]$

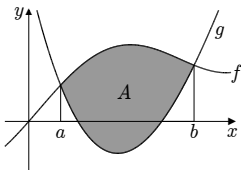
$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \int_a^{x_1} f(x) dx + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \int_{x_2}^b f(x) dx$$



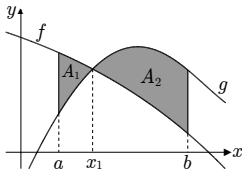
Flächeninhalt zwischen zwei Graphen:

(1)  $f(x) \geq g(x)$  für alle  $x \in [a; b]$



$$\Rightarrow A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

(2)  $f(x_1) = g(x_1)$  für  $x_1 \in [a; b]$



$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 = \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{x_1}^b [g(x) - f(x)] dx$$

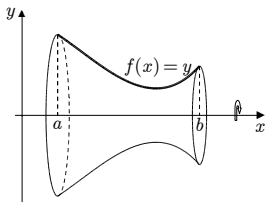
**Rotationskörper:**

Rotation um die  $x$ -Achse:

Volumen  $V_x$  und Mantelfläche  $M_x$  bei Rotation des Graphen von  $f$  um die  $x$ -Achse im Intervall  $[a, b]$ :

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



# Perspektive mit Sinn

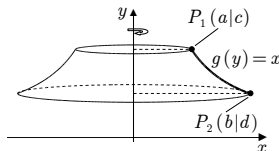
Heute die Gesundheitsbranche  
von morgen gestalten.



[medicalschoool-hamburg.de](https://medicalschoool-hamburg.de)

Rotation um die  $y$ -Achse:

Volumen  $V_y$  und Mantelfläche  $M_y$  bei Rotation des Graphen von  $g$  um die  $y$ -Achse im Intervall  $[a, b]$ .  $g(y)$  ist die Umkehrfunktion von  $f(x)$ .



$$V_y = \left| \pi \int_c^d x^2 dy \right| = \left| \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy \right| = \left| \pi \int_a^b x^2 f'(x) dx \right|$$

$$M_y = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + (x')^2} dy = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

**Bogenlänge:**

Die Bogenlänge des Graphen von  $f$  zwischen den Punkten  $P(a|f(a))$

und  $Q(b|f(b))$  wird folgendermaßen berechnet:  $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

## 2.7 Differenzialgleichungen

**Definition:**

Eine gewöhnliche Differenzialgleichung (DGL) ist eine Gleichung, in der mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion  $y = f(x)$  auftritt.

$$\boxed{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0} \quad (\text{gewöhnliche DGL } n\text{-ter Ordnung})$$

**Lineare Differenzialgleichungen:**

1. Ordnung:

$$y' + a \cdot y = s \text{ bzw.} \\ f'(x) + a \cdot f(x) = s$$

2. Ordnung

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = s \text{ bzw.} \\ f''(x) + a_1 \cdot f'(x) + a_2 \cdot f(x) = s$$

$a_1, a_2$  und  $s$  können auch Funktionen von  $x$  sein (hier nur Betrachtung von Konstanten). Ist  $s = 0$  dann wird die DGL als homogen bezeichnet, sonst als inhomogen.

**Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:**

Gleichung:  $y' + a \cdot y = s \quad (a, s \in \mathbb{R})$

Lösung: Fall 1:  $a = 0$  und  $s \neq 0 \Rightarrow y = s \cdot x + c \quad (c \neq 0)$

Fall 2:  $a \neq 0$  und  $s = 0 \Rightarrow y = c \cdot e^{-ax} \quad (c \neq 0)$

Fall 3:  $a \neq 0$  und  $s \neq 0 \Rightarrow y = c \cdot e^{-ax} + \frac{s}{a} \quad (c \neq 0)$

**Spezielle Typen von DGL 1. Ordnung:**

| Gleichung                        | Lösung   |
|----------------------------------|--|
| $y' = g(x) \cdot h(y)$           | $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + C \quad \text{mit } h(y) \neq 0$      |
| $y' = f(ax + by + c)$            | $x = \int \frac{1}{a + b \cdot f(t)} dt + C \quad \text{mit } t = ax + by + c$ |
| $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ | $x = C \cdot e^{\int \frac{1}{f(t)-t} dt} \quad \text{mit } t = \frac{y}{x}$   |

**Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:**

Gleichung:  $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = s \quad (a_1, a_2, s \in \mathbb{R})$

allgemeine Lösungen für homogene Gleichungen:  $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

Lösungsansatz:  $y = e^{\lambda x}$

charakteristische Gleichung:  $\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_2 = 0$

Fall 1:  $\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0 \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$   
 mit  $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$

Fall 2:  $\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0 \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} \quad \text{mit } \lambda = -\frac{a_1}{2}$

Fall 3:  $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0 \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{-\frac{a_1}{2} x} \cdot \cos(bx) + C_2 \cdot e^{-\frac{a_1}{2} x} \cdot \sin(bx)$   
 mit  $b = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$

## Anwendungen der Differenzialgleichungen:

$y(t)$ : Bestand zum Zeitpunkt  $t$   
 $y_0$ : Anfangswert in  $t = 0$   
 $S$ : Sättigungsgrenze \ Wachstumsgrenze  
 $k$ : Wachstumsrate

Lineares Wachstum:  $y(t) = k \cdot t + y_0 \quad (k \in \mathbb{R})$

Differenzialgleichung:  $y'(t) = k$

allgemeine Lösung:  $y(t) = k \cdot t + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Exponentielles Wachstum:  $y(t) = y_0 \cdot (1 + c)^t \quad (c > -1 \text{ und } c \neq 0)$

Differenzialgleichung:  $y'(t) = k \cdot y(t)$

allgemeine Lösung:  $y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$  mit  $k = \ln(1 + c)$

Beschränktes Wachstum:

Differenzialgleichung:  $y'(t) = k \cdot (S - y(t)) \quad (k > 0)$

allgemeine Lösung:  $y(t) = S - (S - y_0) \cdot e^{-kt}$

Logistisches Wachstum:

Differenzialgleichung:  $y'(t) = k \cdot y(t) \cdot (S - y(t)) \quad (k > 0)$

allgemeine Lösung:  $y(t) = \frac{y_0 \cdot S}{y_0 + (S - y_0) \cdot e^{-kSt}}$

## 3 Lineare Algebra

$A_{(m,n)}$ : Matrix  $A$  mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten (kurz:  $A$ )  
 $A^T$ : transponierte Matrix von  $A$   
 $A^{-1}$ : inverse Matrix zu  $A$   
 $\det A$ : Determinante der Matrix  $A$   
 $U_{ik}$ : Unterdeterminante  
 $A_{ik}$ : Adjunkte des Elements  $a_{ik}$



# Mach' doch, was du willst!

Du hast dich noch nicht entschieden? Macht nichts. Wir sind uns sicher, dass du an der JGU MAINZ deinen Platz findest. Warum? Weil wir ein exzellenter Wissenschaftsstandort mit mehr als 250 Studiengängen sind. Weil du bei uns die Faszination Wissenschaft in allen Facetten erlebst, die Welt von morgen mitgestaltest und deren Probleme lösen hilfst. Weil du bei uns als Global Citizen in einem internationalen Netzwerk studierst. Und weil du deine Studizeit am schönsten Fleck der Metropolregion Rhein-Main verbringst. Weitere gute Gründe? Gibt's hier: [www.uni-mainz.de](http://www.uni-mainz.de)



JOHANNES GUTENBERG  
UNIVERSITÄT MAINZ

### 3.1 Matrizen

**Matrix:**

Eine  $(m, n)$ -Matrix ist ein rechteckiges System von  $m \cdot n$  Elementen (Komponenten)  $a_{ik}$  mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.

$$A = A_{(m,n)} = (a_{ik})_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Zeilenvektor:**

Der  $i$ -te Zeilenvektor einer  $(m, n)$ -Matrix ist eine Matrix mit einer Zeile und  $n$  Spalten:

$$\vec{a}^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

**Spaltenvektor:**

Der  $k$ -te Spaltenvektor einer  $(m, n)$ -Matrix ist eine Matrix mit einer Spalte und  $m$  Zeilen:

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

**Elementare Matrizenumformungen:**

- (1) Vertauschen zweier Zeilen
- (2) Multiplizieren der Elemente einer Zeile mit einer reellen Zahl  $r \neq 0$
- (3) Zu einer Zeile wird eine andere Zeile addiert

**Rang  $r$  einer Matrix:**  $r$  ist gleich

- der maximalen Anzahl von linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.
- der Minimalzahl der vom Nullvektor verschiedenen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren, die durch elementare Matrizenumformungen erzeugt werden können.

**Quadratische Matrizen:**  $(n, n)$ -Matrizen

Eine quadratische Matrix hat genauso viele Spalten wie Zeilen.

Hauptdiagonale:

Die Hauptdiagonale besteht aus den Elementen  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ .

Nebendiagonale:

Die Nebendiagonale besteht aus den Elementen

$$a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots, a_{n1}.$$

obere/untere Dreiecksmatrix:

Alle Elemente unterhalb/oberhalb der Hauptdiagonalen sind gleich 0.

Diagonalmatrix:

Alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen sind gleich 0.

Einheitsmatrix E:

Eine Einheitsmatrix ist eine Diagonalmatrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind.

|  |
|--|
| Rechenregel: $A \cdot E = E \cdot A = A$ |
|--|

**Spezielle Matrizen:**transponierte Matrix  $A^T$ :

Übernimmt man die Zeilen einer  $(m, n)$ -Matrix  $A$  als Spalten in eine  $(n, m)$ -Matrix  $A^T$ , dann nennt man  $A^T$  die transponierte Matrix zu  $A$ .

|   |
|---|
| Rechenregeln: $(A^T)^T = A$ $(rA)^T = rA^T$ $(A+B)^T = A^T + B^T$ |
|---|

symmetrische Matrix:

Eine quadratische Matrix ist symmetrisch, wenn  $A = A^T$  gilt.

schiefsymmetrische Matrix:

Eine quadratische Matrix ist schiefsymmetrisch, wenn  $-A = A^T$  gilt.

Nullmatrix 0:

Bei der Nullmatrix 0 sind alle Elemente gleich 0 ( $m, n$  beliebig).

erweiterte Matrix:

Die erweiterte Matrix  $A|B$  erhält man, indem man die  $(m, n)$ -Matrix  $A$  und die  $(m, s)$ -Matrix  $B$  folgendermaßen zusammenfügt:

$$A|B = \left( \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ms} \end{array} \right)$$

Untermatrix zu einem Element:

Streicht man aus einer  $(m, n)$ -Matrix  $A$  die  $i$ -te Zeile und die  $k$ -te Spalte, dann erhält man die zu dem Element  $a_{ik}$  zugehörige Untermatrix vom Typ  $(m-1, n-1)$ .

inverse Matrix  $A^{-1}$ :

Die inverse Matrix  $A^{-1}$  zur quadratischen Matrix  $A$  existiert genau dann, wenn der Rang von  $A$  gleich  $n$  ( $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ ) und  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$  ist.

Berechnung der inversen Matrix in zwei Schritten:

Schritt 1: Bilden der erweiterten Matrix  $A|E$ .

Schritt 2: Überführung der Matrix  $A|E$  durch elementare Zeilenumformungen in die Form  $E|A^{-1}$ .

|          |  |  |
|----------|--|--|
| Es gilt: | $(A^{-1})^{-1} = A$                    | $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$                |
|          | $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$ | $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ |



**Business & Law School**  
Hochschule für Management und Recht

# Mit Business Zukunft gestalten

Experte werden und praxisnah lernen,  
was die Gesellschaft von morgen braucht.



[businessschool-berlin.de](https://businessschool-berlin.de)

## 3.2 Rechnen mit Matrizen

### Addition/Subtraktion:

Die Addition und Subtraktion ist nur für Matrizen mit derselben Zeilen- und Spaltenanzahl  $m$  und  $n$  ( $A_{(m,n)}$  und  $B_{(m,n)}$ ) definiert:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$\begin{array}{lll} A + B = B + A & (A + B) + C = A + (B + C) & A + 0 = A \\ A - A = 0 & (A + B)^T = A^T + B^T & \end{array}$$

### Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl $r$ :

$$rA = r \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$\begin{array}{lll} (r + s)A = rA + sA & 1 \cdot A = A & r(sA) = (rs)A \\ r(A + B) = rA + rB & 0 \cdot A = 0 & \end{array}$$

### Multiplikation von Matrizen:

Bedingung: Die Spaltenanzahl von  $A$  ist gleich der Zeilenanzahl von  $B$ .  
( $A$  und  $B$  sind verkettbar.)

$$A_{(m,n)} \cdot B_{(n,p)} = C_{(m,p)} \quad \text{mit } c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$$

$C$  hat so viele Zeilen wie  $A$  und Spalten wie  $B$ .

Rechenregeln:

$$\begin{array}{ll} (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C & (rA) \cdot (sB) = rs(A \cdot B) \\ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) & (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \end{array}$$

Im Allgemeinen gilt:  $A \cdot B \neq B \cdot A$

**Falk'sches Schema:** Hilfsmittel zur Berechnung von  $A \cdot B$

|   |     |          |          |     |          |     |          |
|---|-----|----------|----------|-----|----------|-----|----------|
| $\mathbf{A}_{(m,n)} \cdot \mathbf{B}_{(n,p)}$ |     |          | $b_{11}$ | ... | $b_{1k}$ | ... | $b_{1p}$ |
|   |     |          | ...      | ... | ...      | ... | ...      |
|   |     |          | $b_{n1}$ | ... | $b_{nk}$ | ... | $b_{np}$ |
| $a_{11}$                                      | ... | $a_{1n}$ | $c_{11}$ | ... | $c_{1k}$ | ... | $c_{1p}$ |
| ...   | ... | ...      | ...      | ... | ...      | ... | ...      |
| $a_{i1}$                                      | ... | $a_{in}$ | $c_{i1}$ | ... | $c_{ik}$ | ... | $c_{ip}$ |
| ...   | ... | ...      | ...      | ... | ...      | ... | ...      |
| $a_{m1}$                                      | ... | $a_{mn}$ | $c_{m1}$ | ... | $c_{mk}$ | ... | $c_{mp}$ |

Man erhält das Element  $c_{ik}$  von  $C$ , indem man den Zeilenvektor  $i$  der Matrix  $A$  und Spaltenvektor  $k$  der Matrix  $B$  folgendermaßen miteinander multipliziert:

$$c_{ik} = \vec{a}^i \cdot \vec{b}_k = a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{in}b_{nk} \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, p)$$

### 3.3 Determinanten

#### Definition:

Jeder quadratischen Matrix  $A_{(n,n)}$  kann eine eindeutige reelle Zahl zugeordnet werden. Diese nennt man  $n$ -reihige Determinante oder Determinante  $n$ -ter Ordnung.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Für Determinanten gilt:

- (1)  $\det A = \det A^T$
- (2) Die Determinante bleibt gleich, wenn man zu einer Zeile (Spalte) das  $k$ -fache einer anderen Zeile (Spalte) addiert.
- (3) Vertauscht man zwei Zeilen (Spalten) von  $A$ , dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

- (4) Multipliziert man eine Zeile (Spalte) von  $A$  mit  $k \in \mathbb{R}$ , dann muss die Determinante ebenfalls mit  $k$  multipliziert werden.
- (5) Wenn eine Zeile (Spalte) das Vielfache einer anderen ist, dann gilt:  
 $\det A = 0$
- (6) Wenn eine Zeile (Spalte) nur aus Nullen besteht, dann gilt:  
 $\det A = 0$
- (7)  $\det A \cdot \det B = \det A \cdot B$     und     $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

### Unterdeterminante und Adjunkte:

Streicht man in der Matrix  $A$  die  $i$ -te Zeile und die  $k$ -te Spalte, dann ist dieser Untermatrix die Unterdeterminante  $U_{ik}$  zugeordnet.

Die Adjunkte  $A_{ik}$  des Elements  $a_{ik}$  erhält man, indem man die Unterdeterminante mit dem Faktor  $(-1)^{i+k}$  multipliziert:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} U_{ik}$$

### zweireihige Determinanten:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

### dreireihige Determinanten:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Regel von Sarrus bei dreireihigen Determinanten:

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ - & - & - \end{array} \quad \det A = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$



# STUDIER DEINE ZUKUNFT!

QR-Code zu  
unseren  
Studiengängen:



**Ingenieurwissenschaften | Informatik | Wirtschaftsinformatik |  
Medien | Wirtschaftsingenieurwesen | Internationale Wirtschaft |  
Gesundheit/Life Sciences**

- Studieren in Furtwangen, VS-Schwenningen oder Tuttlingen
- Über 50 Studiengänge
- Bachelor, Master und Promotion
- Integriertes Praxissemester
- Kleine Lerngruppen, exzellente Betreuung
- Kombination mit Ausbildung: Studium Plus
- Online- und Teilzeitstudium, Kombination mit Ausbildung
- 145 Partnerhochschulen im Ausland
- Partnerhochschule des Spitzensports

**n-reihige Determinanten:**

Die  $n$ -reihige Determinante einer Matrix  $A_{(n,n)}$  kann nach jeder Zeile oder Spalte mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes entwickelt werden.

Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} U_{ik} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

Entwicklung nach der  $k$ -ten Spalte:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{i=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} U_{ik} \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n$$

**3.4 Lineare Gleichungssysteme****Darstellung:**

Lineares Gleichungssystem (LGS) mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Variablen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ein LGS heißt homogen, wenn alle Konstanten  $b_i$  gleich 0 sind. Ist dies nicht der Fall, wird ein LGS als inhomogen bezeichnet.

**Matrixschreibweise:**

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$A$ : Koeffizientenmatrix     $\vec{x}$ : Lösungsvektor     $\vec{b}$ : Konstantenvektor  
 $S = A|\vec{b}$ : Systemmatrix oder erweiterte Koeffizientenmatrix (Seite 52)



Inhomogenes System: (siehe Seite 58)

Rang  $A = \text{Rang } S = n \Rightarrow$  eindeutige Lösung

Rang  $A = \text{Rang } S < n \Rightarrow$  unendlich viele Lösungen

Rang  $A < \text{Rang } S \Rightarrow$  keine Lösung

## 4 Stochastik

$n$ : Länge (Umfang) einer Stichprobe

$x_i$ : Ergebnisse einer Stichprobe (Urliste) ( $i = 1, \dots, n$ )

$x_j$ : mögliche Merkmalsausprägungen ( $j = 1, \dots, k$ )

$n_j$ : absolute Häufigkeiten der Merkmalsausprägungen  $x_j$  ( $j = 1, \dots, k$ )

$h_j$ : relative Häufigkeiten der Merkmalsausprägungen  $x_j$  ( $j = 1, \dots, k$ )

$\bar{x}$ : arithmetisches Mittel

$s^2$ : Varianz

$s$ : Standardabweichung

$s_{xy}$ : Kovarianz

$r_{xy}$ : Korrelationskoeffizient

$\Omega$ : Ereignismenge bei einem Zufallsexperiment

$\emptyset$ : unmögliches Ereignis eines Zufallsexperiments

$A \cup B$ : Vereinigung der Ereignisse  $A$  und  $B$

$A \cap B$ : Durchschnitt der Ereignisse  $A$  und  $B$

$P(A|B)$ : Bedingte Wahrscheinlichkeit ( $A$  wenn  $B$ )

$f(x)$ : Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion

$F(x)$ : Verteilungsfunktion

$X \sim$ : Kurzschreibweise für die Verteilung der Zufallsvariablen  $X$

$E(X)$ : Erwartungswert  $\mu$  der Zufallsvariablen  $X$

$V(X)$ : Varianz  $\sigma^2$  der Zufallsvariablen  $X$

$\varphi(z)$ : Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

$\Phi(z)$ : Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$B(n; p)$ : binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$

$N(\mu; \sigma)$ : normalverteilt mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$

$z_\alpha$ :  $\alpha$ -Quantil der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle)

## 4.1 Beschreibende Statistik

### Grundgesamtheit und Stichprobe:

Die Grundgesamtheit bei statistischen Erhebungen ist die Gesamtheit aller Objekte, die auf ein bestimmtes Merkmal untersucht werden.

Dieses Merkmal besitzt unterschiedliche Merkmalsausprägungen.

Bei einer Stichprobe vom Umfang  $n$  zieht man  $n$  Stichprobenwerte aus der Grundgesamtheit.

### Urliste, Häufigkeitstabelle, absolute und relative Häufigkeiten:

Sind die Stichprobenwerte  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) in ungeordneter Reihenfolge, so spricht man von einer Urliste .

Die Häufigkeitstabelle gibt an, wie häufig jede der  $k$  möglichen Merkmalsausprägungen  $x_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) beobachtet wurden (absolute Häufigkeit) und wie hoch der Anteil der beobachteten Merkmalsausprägungen ist (relative Häufigkeit).

absolute Häufigkeiten:  $n_j$  mit  $j = 1, \dots, k$

relative Häufigkeiten:  $h_j = \frac{n_j}{n}$  mit  $j = 1, \dots, k$ .

### Lagemaße von Stichproben:

#### Arithmetisches Mittel:

bei Urliste: 
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

bei Häufigkeitstabelle (gewogenes arithmetisches Mittel):

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k x_j \cdot n_j \quad (\text{mit abs. Häuf.})$$

$$\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \dots + x_k \cdot h_k = \sum_{j=1}^k x_j \cdot h_j \quad (\text{mit rel. Häuf.})$$

Harmonisches Mittel: 
$$\bar{x}_{\text{harm}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Geometrisches Mittel:  $\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (x_i > 0)$

Modalwert (Modus)  $m$ :

$m$  ist der am häufigsten vorkommende Wert in der Stichprobe. Es sind bis zu  $n$  Modalwerte möglich.

Zentralwert (Median):

Ordnet man die  $n$  Werte der Urliste der Größe nach an und ist  $n$  ungerade, dann ist der Zentralwert der in der Mitte stehende Wert der Urliste. Ist  $n$  gerade, dann bildet man das arithmetische Mittel von den beiden Werten, die in der Mitte stehen.

### **Streuungsmaße von Stichproben:**

Empirische Varianz:

bei Urliste:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{oder}$$

$$s^2 = \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

bei Häufigkeitstabelle (mit absoluten Häufigkeiten):

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot n_k}{n} \quad \text{bzw.}$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})^2 n_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j x_j^2 - \bar{x}^2$$

bei Häufigkeitstabelle (mit relativen Häufigkeiten):

$$s^2 = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot h_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot h_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot h_k \quad \text{bzw.}$$

$$s^2 = \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})^2 \cdot h_j = \sum_{j=1}^k h_j x_j^2 - \bar{x}^2$$

Standardabweichung:  $s = \sqrt{s^2}$

# Gesundheit und Medizin im Fokus

NC-frei studieren und als Health-  
Professional die Gesundheitsbranche  
der Zukunft gestalten.



[health-and-medical-university.de](https://health-and-medical-university.de)

Mittlere absolute Abweichung:

$$d = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

Spannweite:  $Spannweite = x_{max} - x_{min}$

Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert einer Stichprobe.

Interquartilsabstand (Halbweite):  $Q = x_{0,75} - x_{0,25}$

Ordnet man die  $n$  Werte der Urliste der Größe nach an, dann gibt  $Q$  die Differenz zwischen den beiden Stichprobenwerten an, die die mittleren 50 Prozent der Stichprobenwerte einschließen.

## Korrelation und Regressionsgerade:

Es liegen  $n$  Stichprobenpaare  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  vor.

Kovarianz:

$$s_{xy} = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (y_n - \bar{y})(x_n - \bar{x})}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad \text{oder einfacher zu berechnen mit:}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Korrelationskoeffizient:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

$$= \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots + (y_n - \bar{y})(x_n - \bar{x})}{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{(y_1 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2}}$$

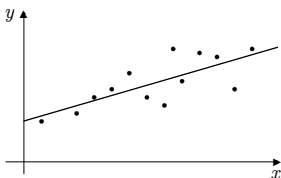


Regressionsgerade:

$$y = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

$$= \frac{r_{xy} \cdot s_y}{s_x}(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

Die Regressionsgerade wird so bestimmt, dass die Streuung der Stichprobenpaare um die Regressionsgerade minimal ist.



## 4.2 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

### Zufallsexperiment und Ergebnis:

Bei einem Zufallsexperiment tritt eines von mehreren möglichen, sich gegenseitig ausschließenden Ergebnissen ein.

### Ergebnismenge, Ereignis, Ereignismenge

Die Ergebnismenge  $\Omega$  (oder auch  $S$ ) besteht aus allen möglichen Ergebnissen.

Jede Teilmenge  $A$  der Ergebnismenge  $\Omega$  wird als Ereignis bezeichnet.

Die Menge aller Teilmengen von  $\Omega$  heißt Ereignismenge.

### Spezielle Ereignisse:

|   |   |
|---|---|
| <u>Elementarereignis:</u>                           | Es besteht aus nur einem Ergebnis.            |
| <u>sicheres Ereignis:</u>                           | Es tritt bei jeder Versuchsdurchführung ein.  |
| <u>unmögliches Ereignis <math>\emptyset</math>:</u> | Es tritt bei keiner Versuchsdurchführung ein. |

### Schreibweise von bestimmten Ereignissen:

$A \subseteq B$  (Teilergebnis  $A$  von  $B$ ):

Wenn  $A$  eintritt, dann trifft sicher  $B$  ein.

$\bar{A}$  (Gegenereignis von  $A$ ):

Dieses Ereignis tritt genau dann ein, wenn  $A$  nicht eintritt.

$A \setminus B$  (Differenz von  $A$  und  $B$ ):

Dieses Ereignis tritt genau dann ein, wenn  $A$  aber nicht  $B$  eintritt.

$A \cup B$  (Vereinigung von  $A$  und  $B$ , „ $A$  oder  $B$ “):

Dieses Ereignis tritt genau dann ein, wenn entweder nur  $A$ , nur  $B$  oder  $A$  und  $B$  gemeinsam eintreten.

$A \cap B$  (Durchschnitt von  $A$  und  $B$ , „ $A$  und  $B$ “):

Dieses Ereignis tritt genau dann ein, wenn  $A$  und  $B$  gemeinsam eintreten.

### Absolute Häufigkeit $H_n(A)$ :

Anzahl des Auftretens von Ereignis  $A$  bei  $n$  Durchführungen eines Zufallsexperiments.

**Relative Häufigkeit  $h_n(A)$ :**  $h_n(A) = \frac{H_n(A)}{n}$

### Wahrscheinlichkeitsfunktion:

Eine Funktion  $P$ , die jedem Ereignis eine reelle Zahl zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind (Axiome von Kolmogorow):

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$  für alle  $A \in \Omega$
2.  $P(A) \geq 0$  für alle  $A \subseteq \Omega$  (Nicht-Negativität)
3.  $P(\Omega) = 1$  (Normierung)
4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$   
wenn  $A \cap B = \emptyset$  (disjunkt) (Additivität)



# Fluglotsin (w/m/d) werden

Jetzt für einen **Ausbildungs-**  
**platz im Jahr 2023** bewerben

- ✓ TOP-Gehalt
- ✓ Beste Übernahmechancen
- ✓ Praxis von Beginn an



**DFS** Deutsche Flugsicherung

**Laplace-Experiment:**

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, heißt Laplace-Experiment. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses  $A$  ist:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

**4.3 Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten****Grundlegende Rechenregeln:**

- (1) Das Ereignis  $A$  enthalte die Elementarereignisse  $e_1, \dots, e_k$ . Dann gilt:  $P(A) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_k\})$
- (2)  $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- (3)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  (Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses)
- (4)  $P(\emptyset) = 0$  (Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses)
- (5)  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

**Additionssatz:**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**Bedingte Wahrscheinlichkeit:**

Wahrscheinlichkeit für  $A$ , wenn  $B$  bereits eingetreten ist:

$$s \ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{für } P(A|B) \text{ auch häufig } P_B(A))$$

**Multiplikationssatz:**

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad \text{mit } P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) \quad \text{mit } P(A) > 0$$

Für die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mit  $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$  gilt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

**Unabhängigkeit von zwei Ereignissen:**

$A$  und  $B$  heißen genau dann voneinander unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(A|B) = P(A) \text{ und } P(B|A) = P(B)$$

**Totale Wahrscheinlichkeit:**

Wenn (a)  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$  und

(b)  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$  erfüllt ist, dann gilt:

$$P(A) = (A|B_1) \cdot P(B_1) + (A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + (A|B_n) \cdot P(B_n)$$

**Formel von Bayes:**

Wenn (a)  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$  und

(b)  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$  erfüllt ist,

dann gilt für alle  $k = 1, \dots, n$ :

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

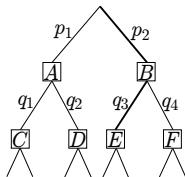
 **$n$ -stufiges (mehrstufiges) Zufallsexperiment:**

Die Zusammenfassung von  $n$  nacheinander ablaufenden Zufallsexperimenten zu einem einzigen Zufallsexperiment nennt man  $n$ -stufiges (mehrstufiges) Zufallsexperiment. Dies kann man in einem Baumdiagramm veranschaulichen.

**1. Pfadregel (Produktregel):**

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des dazugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

Hier gilt:  $P(\{B; E; \dots\}) = p_2 \cdot q_3 \cdot \dots$

**2. Pfadregel (Summenregel):**

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, bei denen das Ereignis eintritt/erfüllt ist.



**Permutationen:**

Jede Anordnung von  $n$  verschiedenen Elementen, bei der alle  $n$  Elemente aufgeführt werden, heißt Permutation dieser Elemente.

Die Anzahl der Permutationen beträgt bei

-  $n$  verschiedenen Elementen:  $n!$

-  $k$  verschiedenen Elementen (Gruppen) mit jeweils  $n_1, n_2, \dots, n_k$

gleichen Elementen:  $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$  mit  $n_1 + \dots + n_k = n$

**Variationen:**

Als Variationen bezeichnet man die möglichen Anordnungen von  $k$  aus  $n$  verschiedenen Elementen mit Berücksichtigung der Reihenfolge.

Die Anzahl der Variationen beträgt

- ohne Zurücklegen der Elemente:  $\frac{n!}{(n-k)!}$

- mit Zurücklegen der Elemente:  $n^k$

**Kombinationen:**

Als Kombinationen bezeichnet man die möglichen Anordnungen von  $k$  aus  $n$  verschiedenen Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Die Anzahl der Kombinationen beträgt

- ohne Zurücklegen der Elemente:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- mit Zurücklegen der Elemente:  $\binom{n+k-1}{k}$

## 4.5 Zufallsvariable

### Definition Zufallsvariable:

Eine Zufallsvariable (Zufallsgröße)  $X$  ordnet jedem Ereignis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl  $x_i$  zu.

Eine *diskrete* Zufallsvariable kann in einem Intervall nur endlich viele Werte annehmen.

Eine *stetige* Zufallsvariable kann in einem Intervall beliebig viele Werte annehmen.

### Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Diese ist eine Funktion, die jedem  $x_i$  einer Zufallsvariablen eine Wahrscheinlichkeit  $P(X = x_i)$  zuordnet.

#### Wahrscheinlichkeitsfunktion bei diskreter Zufallsvariable $X$ :

$$f(x) = P(X = x_i) = p_i \quad \text{für } x = x_i \text{ mit } i = 1, \dots, n$$

Es gilt: (1)  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  und (2)  $p_i \geq 0$

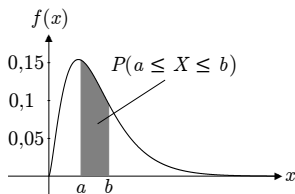
#### Dichtefunktion bei stetiger Zufallsvariable $X$ :

Die Dichtefunktion ist gleich der Ableitung ihrer Verteilungsfunktion.

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \quad \text{mit:}$$

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad \text{und}$$

$$(2) f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



### Verteilungsfunktion:

bei diskreter Zufallsvariable:  $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$



# Deine Erfolgsrechnung

Gesundheit studieren mit Zukunft.



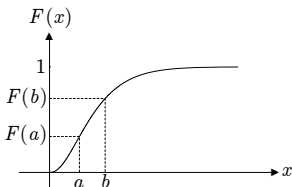
[medicalschooll-berlin.de](https://medicalschooll-berlin.de)

bei stetiger Zufallsvariable:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

mit Eigenschaften:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$       $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$   
 (2)  $F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)$



Im stetigen Fall gilt:  $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

### **Maßzahlen von Verteilungen:**

Erwartungswert einer Zufallsvariablen:

im diskreten Fall: 
$$E(X) = \mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(x_i)$$

im stetigen Fall: 
$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Varianz einer Zufallsvariablen:

allgemein: 
$$V(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$$

im diskreten Fall:

$$V(X) = \sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$$

im stetigen Fall:

$$V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2$$

Standardabweichung einer Zufallsvariablen:  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}$

### **Tschebyschewsche Ungleichung:**

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{V(X)}{c^2} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \text{ und } c \geq 0$$

## 4.6 Spezielle Verteilungsmodelle und Zentraler Grenzwertsatz

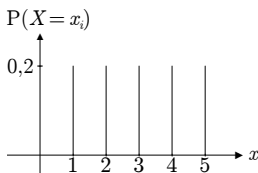
**Diskrete Gleichverteilung:**

$$X \sim G(x_1, \dots, x_m) \quad x_i \in \mathbb{R}$$

$$P(X = x_i) = 1/m \quad (\text{für alle } i = 1, \dots, m)$$

Falls  $x_i = i$  ( $i = 1, \dots, m$ ): (s. Grafik)

$$E(X) = \frac{m+1}{2} \quad V(X) = \frac{m^2-1}{12}$$



**Hypergeometrische Verteilung:**

$$X \sim H(N; M; n) \quad N, M, n \in \mathbb{N}; n \leq M \leq N$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{mit } 0 \leq k \leq \min(n, M)$$

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N} \quad V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Interpretation mit dem Urnenmodell:

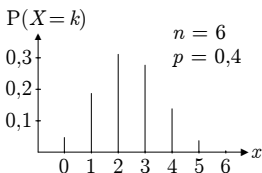
$M$  von  $N$  Kugeln in einer Urne besitzen ein bestimmtes Merkmal. Bei einer Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang  $n$  ist  $P(X = k)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $k$  Kugeln dieses bestimmte Merkmal besitzen.

**Binomialverteilung:**

$$X \sim B(n; p) \quad n \in \mathbb{N}, 0 < p < 1$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = n \cdot p \quad V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$



Interpretation mit dem Urnenmodell:

Der Anteil der Kugeln in einer Urne mit einem bestimmten Merkmal beträgt  $p$ . Bei einer Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang  $n$  ist  $P(X = k)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $k$  Kugeln dieses bestimmte Merkmal besitzen.

**Bernoulli-Verteilung:** Spezialfall der Binomialverteilung ( $n = 1$ )

$$P(X = k) = \begin{cases} 1 - p & \text{für } k = 0 \\ p & \text{für } k = 1 \end{cases}$$

$$E(X) = p \qquad V(X) = p(1 - p)$$

Bernoulli-Experiment:

Ein Zufallsexperiment, bei dem ein Ereignis entweder eintritt ( $k = 1$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p$ ) oder nicht ( $k = 0$  mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p$ ), wird als Bernoulli-Experiment bezeichnet.

Bernoulli-Kette:

Die  $n$ -fache unabhängige Durchführung eines Bernoulli-Experiments bezeichnet man als eine Bernoulli-Kette der Länge  $n$ .

Wahrscheinlichkeit für genau  $k$  Treffer:  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

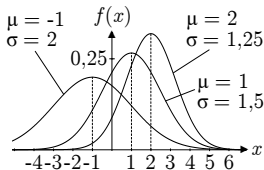
**Normalverteilung:**

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \qquad \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

$$E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$





DEINE  
ZUKUNFT

#interdisziplinär

#verantwortlich

#international

#persönlich

#praxisnah

#innovativ

Hochschule Pforzheim —  
Führend durch Perspektivenwechsel

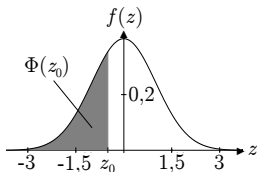
Standardnormalverteilung (Spezialfall der Normalverteilung):

$$Z \sim N(0; 1)$$

$$f(z) = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$E(Z) = 0 \quad V(Z) = 1$$



$$\text{Symmetrie:} \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$z_\alpha = -z_{1-\alpha} \quad \text{für alle } \alpha \in ]0; 1[$$

$$\text{symmetrisches Intervall:} \quad P(-k \leq Z \leq k) = P(|Z| \leq k) = 2 \cdot \Phi(k) - 1$$

mit  $k \in \mathbb{R}$

Standardisierung einer normalverteilten Zufallsvariablen:

$$\text{Standardisierung:} \quad X \sim N(\mu; \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1)$$

Durch die Standardisierung kann jede beliebig normalverteilte Zufallsvariable  $X$  in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $Z$  mit den Parametern  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  umgewandelt werden.

$$\text{Verteilungsfunktion:} \quad \Phi(z) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z) = P(X \leq x)$$

$$\text{Wahrscheinlichkeiten:} \quad P(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

 $k\sigma$ -Regeln:

$$\text{Wenn } X \sim (\mu; \sigma^2), \text{ dann gilt:} \quad \begin{aligned} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &\approx 0,683 \\ P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &\approx 0,954 \\ P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &\approx 0,997 \end{aligned}$$

## Zentraler Grenzwertsatz:

### Bedingungen:

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig und identisch verteilt (nicht notwendigerweise normalverteilt) mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ .

Der Zentrale Grenzwertsatz besagt Folgendes:

$$Z = \frac{X_1 + \dots + X_n - n \cdot \mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z \sim N(0; 1)$$

Es gilt also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z \leq z) = \Phi(z)$

### Approximation durch die Normalverteilung:

$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{app.}{\approx} N(n\mu; n\sigma^2)$  ( $n$  ist hinreichend groß)

Das bedeutet, dass die Summe der Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  für hinreichend große  $n$  (die Angaben für  $n$  sind nicht einheitlich;  $n$  zwischen 30 und 100) approximativ normalverteilt ist.

## 4.7 Näherungsformeln für die Binomialverteilung

### Näherungsformel von Poisson:

Wenn  $p$  sehr klein und  $n$  sehr groß ist, dann gilt für  $X \sim B(n; p)$ :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!} \quad \text{mit } \mu = np$$

### Näherungsformel von De Moivre-Laplace:

Wenn  $np(1-p) \geq 9$  ist, dann gilt für  $X \sim B(n; p)$ :

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{mit } \mu = np \text{ und } \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

$$P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0,5 - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{mit } \mu = np \text{ und } \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

## 4.8 Konfidenzintervalle

Ein Konfidenzintervall mit dem Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  überdeckt mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  den unbekanntem Parameter.

$n_{min}$  ist der Mindeststichprobenumfang für ein Konfidenzintervall mit Niveau  $1 - \alpha$ , das höchstens die Breite  $l$  hat.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{Schätzwert für } \mu \text{ aus der Stichprobe})$$

$z_{1-\alpha/2}$ :  $(1 - \alpha/2)$ -Quantil der Standardnormalverteilung  $\rightarrow$  s. Tabelle

### Konfidenzintervall für den Erwartungswert $\mu$ :

Bedingungen:  $X$  ist normalverteilt,  $\sigma$  ist bekannt,  $n$  beliebig:

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad (\text{Konfidenzniveau } 1 - \alpha)$$

$$n_{min} = \left( \frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{l} \right)^2$$

Bedingungen:  $X$  ist normalverteilt,  $\sigma$  ist unbekannt  $n \geq 100$ :

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \quad (\text{Konfidenzniveau } \approx 1 - \alpha)$$

$$\text{mit } S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (\text{Schätzwert für } \sigma)$$

Bedingungen:  $X$  ist nicht normalverteilt,  $\sigma$  ist bekannt,  $n \geq 30$ :

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad (\text{Konfidenzniveau } \approx 1 - \alpha)$$

$$n_{min} = \max \left\{ 30, \left( \frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{l} \right)^2 \right\}$$



**Konfidenzintervall für den Anteilswert  $p$ :**Bedingung:  $n \cdot p^*(1 - p^*) \geq 9$ mit  $p^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  wobei  $X_i \sim B(1; p)$  ( $p^*$  ist Schätzwert für  $p$ )Konfidenzintervall mit Konfidenzniveau  $\approx 1 - \alpha$ :

$$\left[ p^* - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \quad ; \quad p^* + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \right]$$

$$n_{min} = \max \left\{ \frac{9}{p^*(1-p^*)}, \frac{4 \cdot z_{1-\alpha/2}^2 \cdot p^*(1-p^*)}{l^2} \right\}$$

**Konfidenzintervall für eine Anzahl:**

Die Vorgehensweise ist identisch wie beim Anteilswert  $p$ . Das Konfidenzintervall für die Anzahl  $N \cdot p$  wird bestimmt, indem zusätzlich die Grenzen mit  $N$  multipliziert werden.

Konfidenzintervall für die Anzahl mit Konfidenzniveau  $\approx 1 - \alpha$ :

$$\left[ N \cdot \left( p^* - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \right) \quad ; \quad N \cdot \left( p^* + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \right) \right]$$

$$n_{min} = \max \left\{ \frac{9}{p^*(1-p^*)}, \frac{4N^2 \cdot z_{1-\alpha/2}^2 \cdot p^*(1-p^*)}{l^2} \right\}$$

**4.9 Hypothesentests****Vorgehen beim Hypothesentest:**

- (1) Formulierung der Nullhypothese  $H_0$  und der logisch entgegengesetzten Alternativhypothese (Gegenhypothese)  $H_1$
- (2) Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit (des Signifikanzniveaus)  $\alpha$
- (3) Bestimmung des Ablehnungsbereichs  $A$  (Verwerfungsbereich, kritischer Bereich)
- (4)  $H_0$  wird abgelehnt, wenn der aus der Stichprobe ermittelte Wert in den Ablehnungsbereich fällt. Ansonsten wird  $H_0$  angenommen.

### Fehler beim Testen von Hypothesen:

|  | $H_0$ ist wirklich wahr                       | $H_1$ ist wirklich wahr                      |
|--|---|--|
| $H_0$ wird angenommen                        | richtige Entscheidung                         | Fehler 2. Art<br>Wahrscheinlichkeit: $\beta$ |
| $H_0$ wird abgelehnt<br>(Annahme von $H_1$ ) | Fehler 1. Art<br>Wahrscheinlichkeit: $\alpha$ | richtige Entscheidung                        |

$$P(H_0 \text{ wird abgelehnt} | H_0 \text{ ist wahr}) = \alpha$$

$$P(H_0 \text{ wird angenommen} | H_1 \text{ ist wahr}) = \beta$$

### Zweiseitige und einseitige Tests:

zweiseitiger Test:

Nullhypothese:  $H_0 : \theta = \theta_0$

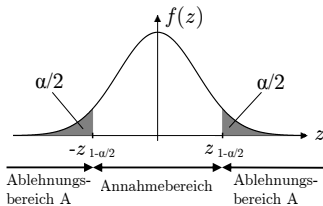
Alternativhypothese:  $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Ablehnungsbereich bei

Verwendung der

Standardnormalverteilung:

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| > z_{1-\alpha/2}\}$$



linksseitiger Test:

Nullhypothese:  $H_0 : \theta \geq \theta_0$

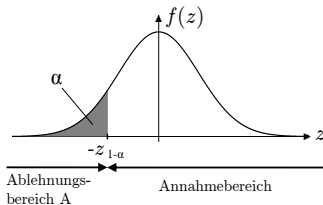
Alternativhypothese:  $H_1 : \theta < \theta_0$

Ablehnungsbereich bei

Verwendung der

Standardnormalverteilung:

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid t < -z_{1-\alpha}\}$$



# CareerGuide

FOR ACADEMICS ONLY

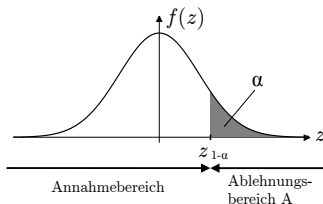
rechtsseitiger Test:Nullhypothese:  $H_0 : \theta \leq \theta_0$ Alternativhypothese:  $H_1 : \theta > \theta_0$ 

Ablehnungsbereich bei

Verwendung der

Standardnormalverteilung:

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid t > z_{1-\alpha}\}$$

**Binomialtest (Test auf den Anteilswert p):**zweiseitiger Test:Hypothesen:  $H_0 : p = p_0$   $H_1 : p \neq p_0$ Ablehnungsbereich:  $A = \{0; 1; \dots; c_l\} \cup \{c_r; c_{r+1}; \dots; n\}$ Dabei ist  $c_l$  die größte und  $c_r$  die kleinste Zahl, fürdie gilt:  $P_{n;p_0}(X \leq c_l) = \sum_{i=0}^{c_l} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \leq \frac{\alpha}{2}$ 

$$P_{n;p_0}(X \geq c_r) = \sum_{i=c_r}^n \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \leq \frac{\alpha}{2}$$

Entscheidung: Ablehnung von  $H_0$ , wenn in der Stichprobe die Anzahl der Objekte, die das zu untersuchende Merkmal (mit der unbekanntenen Eintrittswahrscheinlichkeit  $p$ ) besitzen, Element des Ablehnungsbereichs ist. Ansonsten wird  $H_0$  angenommen.

linksseitiger Test:Hypothesen:  $H_0 : p \geq p_0$   $H_1 : p < p_0$ Ablehnungsbereich:  $A = \{0; 1; \dots; c\}$ Dabei ist  $c$  die möglichst größte Zahl, für die gilt:

$$P_{n;p_0}(X \leq c) = \sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \leq \alpha$$

Entscheidung: siehe zweiseitiger Test

rechtsseitiger Test:

Hypothesen:  $H_0 : p \leq p_0$      $H_1 : p > p_0$

Ablehnungsbereich:  $A = \{c; c + 1; \dots; n\}$

Dabei ist  $c$  die möglichst kleinste Zahl, für die gilt:

$$P_{n;p_0}(X \geq c) = \sum_{i=c}^n \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \leq \alpha$$

Entscheidung: siehe zweiseitiger Test

### Test auf den Erwartungswert $\mu$ :

Hypothesen:

a)  $H_0 : \mu = \mu_0$   
 $H_1 : \mu \neq \mu_0$

b)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$   
 $H_1 : \mu > \mu_0$

c)  $H_0 : \mu \geq \mu_0$   
 $H_1 : \mu < \mu_0$

Annahmen:

$X$  ist normalverteilt,  $\sigma$  ist bekannt,  $n$  ist beliebig    (Gauß-Test)

Entscheidung: Ablehnung von  $H_0$ , wenn

a)  $|T| > z_{1-\alpha/2}$     b)  $T > z_{1-\alpha}$     c)  $T < -z_{1-\alpha}$

mit:  $T = \frac{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$

## 5 Aussagenlogik

Die Aussagevariablen  $p$  und  $q$  können entweder wahr ( $w$ ) oder falsch ( $f$ ) sein.

### Verknüpfung von Aussagen:

|             |                       |  |
|-------------|-----------------------|--|
| Negation    | $\neg p$              | nicht $p$                                    |
| Konjunktion | $p \wedge q$          | $p$ und $q$ ; sowohl $p$ als auch $q$        |
| Disjunktion | $p \vee q$            | $p$ oder $q$ (nicht ausschließendes oder)    |
| Alternative | $p \oplus q$          | entweder $p$ oder $q$ (ausschließendes oder) |
| Implikation | $p \Rightarrow q$     | wenn $p$ , dann $q$                          |
| Äquivalenz  | $p \Leftrightarrow q$ | $p$ äquivalent zu $q$                        |

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \qquad p \Rightarrow q = \neg p \vee q$$

$$p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

**Wahrheitstafel:**

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \oplus q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|-----|-----|----------|----------|--------------|------------|--------------|-------------------|-----------------------|
| $w$ | $w$ | $f$      | $f$      | $w$          | $w$        | $f$          | $w$               | $w$                   |
| $w$ | $f$ | $f$      | $w$      | $f$          | $w$        | $w$          | $f$               | $f$                   |
| $f$ | $w$ | $w$      | $f$      | $f$          | $w$        | $w$          | $w$               | $f$                   |
| $f$ | $f$ | $w$      | $w$      | $f$          | $f$        | $f$          | $w$               | $w$                   |

## 6 Komplexe Zahlen

### 6.1 Darstellungsweisen

**Normalform:**

$$z = a + bi \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } i^2 = -1$$

$a$  : Realteil von  $z$  ( $Re z$ )

$b$  : Imaginärteil von  $z$  ( $Im z$ )

Die zu  $z$  konjugierte komplexe Zahl lautet:

$$\bar{z} = a - bi$$

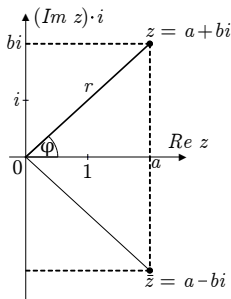
**Polarform:**

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i)$$

mit  $r \geq 0$  und  $i^2 = -1$

**Exponentialform:**

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad (\varphi \text{ im Bogenmaß}) \quad \text{mit } e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$





SIEMENS

# Irgendwas mit 3.1415926535

Bewirb dich jetzt für eine Ausbildung oder ein Duales Studium bei Siemens.

Von Elektrotechnik über Informatik bis Mechatronik:  
Wir bieten über 30 verschiedene Ausbildungs- und Duale Studiengänge an. Egal wofür du dich entscheidest, bei uns machst du alles mit Zukunft. Erfahre hier mehr:  
[ausbildung.siemens.com](https://ausbildung.siemens.com)



**Zusammenhänge zwischen den Darstellungsformen:**

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{r} \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{r} \quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}$$

## 6.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

**Rechnen mit der Normalform:**

Gegeben:  $z_1 = a_1 + b_1i$  und  $z_2 = a_2 + b_2i$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + (b_1a_2 - a_1b_2) \cdot i}{a_2^2 + b_2^2} \quad (z_2 \neq 0 + 0i)$$

$$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{bzw.} \quad |z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

**Rechnen mit der Polarform:**

Gegeben:  $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1) \cdot i)$  und

$$z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2) \cdot i)$$

$$z_1 \pm z_2 = (r_1\cos(\varphi_1) \pm r_2\cos(\varphi_2)) + (r_1\sin(\varphi_1) \pm r_2\sin(\varphi_2)) \cdot i$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot i]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot i] \quad (z_2 \neq 0 + 0i)$$

$$|z_1| = r_1 \quad \text{bzw.} \quad |z_2| = r_2$$

**Rechnen mit der Exponentialform:**

Gegeben:  $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$  und  $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0 + 0i)$$

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi) \cdot i) \quad (\text{Moivre'sche Formel})$$



**Summierte Binomialverteilung:**  $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

| n | k | p    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|   |   | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 1/6  | 0,2  | 0,25 | 0,3  | 1/3  | 0,4  | 0,5  |      |
| 1 | 0 | 0,   | 9800 | 9500 | 9000 | 8333 | 8000 | 7500 | 7000 | 6667 | 6000 | 5000 |
| 2 | 0 | 0,   | 9604 | 9025 | 8100 | 6944 | 6400 | 5625 | 4900 | 4444 | 3600 | 2500 |
|   | 1 |      | 9996 | 9975 | 9900 | 9722 | 9600 | 9375 | 9100 | 8889 | 8400 | 7500 |
| 3 | 0 | 0,   | 9412 | 8574 | 7290 | 5787 | 5120 | 4219 | 3430 | 2963 | 2160 | 1250 |
|   | 1 |      | 9988 | 9928 | 9720 | 9259 | 8960 | 8438 | 7840 | 7407 | 6480 | 5000 |
|   | 2 |      |      | 9999 | 9990 | 9954 | 9920 | 9844 | 9730 | 9630 | 9360 | 8750 |
| 4 | 0 | 0,   | 9224 | 8145 | 6561 | 4823 | 4096 | 3164 | 2401 | 1975 | 1296 | 0625 |
|   | 1 |      | 9977 | 9860 | 9477 | 8681 | 8192 | 7383 | 6517 | 5926 | 4752 | 3125 |
|   | 2 |      |      | 9995 | 9963 | 9838 | 9728 | 9492 | 9163 | 8889 | 8208 | 6875 |
|   | 3 |      |      |      | 9999 | 9992 | 9984 | 9961 | 9919 | 9877 | 9744 | 9375 |
| 5 | 0 | 0,   | 9039 | 7738 | 5905 | 4019 | 3277 | 2373 | 1681 | 1317 | 0778 | 0313 |
|   | 1 |      | 9962 | 9774 | 9185 | 8038 | 7373 | 6328 | 5282 | 4609 | 3370 | 1875 |
|   | 2 |      | 9999 | 9988 | 9914 | 9645 | 9421 | 8965 | 8369 | 7901 | 6826 | 5000 |
|   | 3 |      |      |      | 9995 | 9967 | 9933 | 9844 | 9692 | 9547 | 9130 | 8125 |
|   | 4 |      |      |      |      | 9999 | 9997 | 9990 | 9976 | 9959 | 9898 | 9688 |
| 6 | 0 | 0,   | 8858 | 7351 | 5314 | 3349 | 2621 | 1780 | 1176 | 0878 | 0467 | 0156 |
|   | 1 |      | 9943 | 9672 | 8857 | 7368 | 6554 | 5339 | 4202 | 3512 | 2333 | 1094 |
|   | 2 |      | 9998 | 9978 | 9842 | 9377 | 9011 | 8306 | 7443 | 6804 | 5443 | 3438 |
|   | 3 |      |      | 9999 | 9987 | 9913 | 9830 | 9624 | 9295 | 8999 | 8208 | 6563 |
|   | 4 |      |      |      | 9999 | 9993 | 9984 | 9954 | 9891 | 9822 | 9590 | 8906 |
|   | 5 |      |      |      |      | 9999 | 9998 | 9993 | 9986 | 9959 | 9844 |      |
| 7 | 0 | 0,   | 8681 | 6983 | 4783 | 2791 | 2097 | 1335 | 0824 | 0585 | 0280 | 0078 |
|   | 1 |      | 9921 | 9556 | 8503 | 6698 | 5767 | 4449 | 3294 | 2634 | 1586 | 0625 |
|   | 2 |      | 9997 | 9962 | 9743 | 9042 | 8520 | 7564 | 6471 | 5706 | 4199 | 2266 |
|   | 3 |      |      | 9998 | 9973 | 9824 | 9667 | 9294 | 8740 | 8267 | 7102 | 5000 |
|   | 4 |      |      |      | 9998 | 9980 | 9953 | 9871 | 9712 | 9547 | 9037 | 7734 |
|   | 5 |      |      |      |      | 9999 | 9996 | 9987 | 9962 | 9931 | 9812 | 9375 |
|   | 6 |      |      |      |      |      | 9999 | 9998 | 9995 | 9984 | 9922 |      |

nicht aufgeführte Werte sind gleich 1,0000 (bei Rundung auf vier Dezimalstellen)

Es gilt:  $P_{n;p}(X = k) = P_{n;p}(X \leq k) - P_{n;p}(X \leq k - 1)$

Für  $p \geq 0,5$  gilt:  $P_{n;p}(X \leq k) = 1 - P_{n;1-p}(X \leq n - k - 1)$

**Summierte Binomialverteilung:**  $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

| n  | k | p    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|    |   | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 1/6  | 0,2  | 0,25 | 0,3  | 1/3  | 0,4  | 0,5  |      |
| 8  | 0 | 0,   | 8508 | 6634 | 4305 | 2326 | 1678 | 1001 | 0576 | 0390 | 0168 | 0039 |
|    | 1 |      | 9897 | 9428 | 8131 | 6047 | 5033 | 3671 | 2553 | 1951 | 1064 | 0352 |
|    | 2 |      | 9996 | 9942 | 9619 | 8652 | 7969 | 6785 | 5518 | 4682 | 3154 | 1445 |
|    | 3 |      |      | 9996 | 9950 | 9693 | 9437 | 8862 | 8059 | 7414 | 5941 | 3633 |
|    | 4 |      |      |      | 9996 | 9954 | 9896 | 9727 | 9420 | 9121 | 8263 | 6367 |
|    | 5 |      |      |      |      | 9996 | 9988 | 9958 | 9887 | 9803 | 9502 | 8555 |
|    | 6 |      |      |      |      |      | 9999 | 9996 | 9987 | 9974 | 9915 | 9648 |
|    | 7 |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9998 | 9993 | 9961 |      |
| 9  | 0 | 0,   | 8337 | 6302 | 3874 | 1938 | 1342 | 0751 | 0404 | 0260 | 0101 | 0020 |
|    | 1 |      | 9869 | 9288 | 7748 | 5427 | 4362 | 3003 | 1960 | 1431 | 0705 | 0195 |
|    | 2 |      | 9994 | 9916 | 9470 | 8217 | 7382 | 6007 | 4628 | 3772 | 2318 | 0898 |
|    | 3 |      |      | 9994 | 9917 | 9520 | 9144 | 8343 | 7297 | 6503 | 4826 | 2539 |
|    | 4 |      |      |      | 9991 | 9910 | 9804 | 9511 | 9012 | 8552 | 7334 | 5000 |
|    | 5 |      |      |      | 9999 | 9989 | 9969 | 9900 | 9747 | 9576 | 9006 | 7461 |
|    | 6 |      |      |      |      | 9999 | 9997 | 9987 | 9957 | 9917 | 9750 | 9102 |
|    | 7 |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9996 | 9990 | 9962 | 9805 |
|    | 8 |      |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9997 | 9980 |      |
| 10 | 0 | 0,   | 8171 | 5987 | 3487 | 1615 | 1074 | 0563 | 0282 | 0173 | 0060 | 0010 |
|    | 1 |      | 9838 | 9139 | 7361 | 4845 | 3758 | 2440 | 1493 | 1040 | 0464 | 0107 |
|    | 2 |      | 9991 | 9885 | 9298 | 7752 | 6778 | 5256 | 3828 | 2991 | 1673 | 0547 |
|    | 3 |      |      | 9990 | 9872 | 9303 | 8791 | 7759 | 6496 | 5593 | 3823 | 1719 |
|    | 4 |      |      | 9999 | 9984 | 9845 | 9672 | 9219 | 8497 | 7869 | 6331 | 3770 |
|    | 5 |      |      |      | 9999 | 9976 | 9936 | 9803 | 9527 | 9234 | 8338 | 6230 |
|    | 6 |      |      |      |      | 9997 | 9991 | 9965 | 9894 | 9803 | 9452 | 8281 |
|    | 7 |      |      |      |      |      | 9999 | 9996 | 9984 | 9966 | 9877 | 9453 |
|    | 8 |      |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9996 | 9983 | 9893 |
|    | 9 |      |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9990 | 9990 |      |

nicht aufgeführte Werte sind gleich 1,0000 (bei Rundung auf vier Dezimalstellen)

Es gilt:  $P_{n;p}(X = k) = P_{n;p}(X \leq k) - P_{n;p}(X \leq k - 1)$

Für  $p \geq 0,5$  gilt:  $P_{n;p}(X \leq k) = 1 - P_{n;1-p}(X \leq n - k - 1)$

**Summierte Binomialverteilung:**  $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

| n  | k  | p    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|    |    | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 1/6  | 0,2  | 0,25 | 0,3  | 1/3  | 0,4  | 0,5  |      |      |
| 15 | 0  | 0,   | 7386 | 4633 | 2059 | 0649 | 0352 | 0134 | 0047 | 0023 | 0005 | 0000 |      |
|    | 1  |      | 9647 | 8290 | 5490 | 2596 | 1671 | 0802 | 0353 | 0194 | 0052 | 0005 |      |
|    | 2  |      | 9970 | 9638 | 8159 | 5322 | 3980 | 2361 | 1268 | 0794 | 0271 | 0037 |      |
|    | 3  |      | 9998 | 9945 | 9444 | 7685 | 6482 | 4613 | 2969 | 2092 | 0905 | 0176 |      |
|    | 4  |      |      | 9994 | 9873 | 9102 | 8358 | 6865 | 5155 | 4041 | 2173 | 0592 |      |
|    | 5  |      |      | 9999 | 9978 | 9726 | 9389 | 8516 | 7216 | 6184 | 4032 | 1509 |      |
|    | 6  |      |      |      | 9997 | 9934 | 9819 | 9434 | 8689 | 7970 | 6098 | 3036 |      |
|    | 7  |      |      |      |      | 9987 | 9958 | 9827 | 9500 | 9118 | 7869 | 5000 |      |
|    | 8  |      |      |      |      | 9998 | 9992 | 9958 | 9848 | 9692 | 9050 | 6964 |      |
|    | 9  |      |      |      |      |      | 9999 | 9999 | 9992 | 9963 | 9915 | 9662 | 8491 |
|    | 10 |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9999 | 9993 | 9982 | 9907 | 9408 |
|    | 11 |      |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9997 | 9981 | 9824 |      |
|    | 12 |      |      |      |      |      |      |      |      | 9997 | 9963 |      |      |
| 13 |    |      |      |      |      |      |      |      |      | 9995 |      |      |      |
| 20 | 0  | 0,   | 6676 | 3585 | 1216 | 0261 | 0115 | 0032 | 0008 | 0003 | 0000 | 0000 |      |
|    | 1  |      | 9401 | 7358 | 3917 | 1304 | 0692 | 0243 | 0076 | 0033 | 0005 | 0000 |      |
|    | 2  |      | 9929 | 9245 | 6769 | 3287 | 2061 | 0913 | 0355 | 0176 | 0036 | 0002 |      |
|    | 3  |      | 9994 | 9841 | 8670 | 5665 | 4114 | 2252 | 1071 | 0604 | 0160 | 0013 |      |
|    | 4  |      |      | 9974 | 9568 | 7687 | 6296 | 4148 | 2375 | 1515 | 0510 | 0059 |      |
|    | 5  |      |      | 9997 | 9887 | 8982 | 8042 | 6172 | 4164 | 2972 | 1256 | 0207 |      |
|    | 6  |      |      |      | 9976 | 9629 | 9133 | 7858 | 6080 | 4793 | 2500 | 0577 |      |
|    | 7  |      |      |      | 9996 | 9887 | 9679 | 8982 | 7723 | 6615 | 4159 | 1316 |      |
|    | 8  |      |      |      | 9999 | 9972 | 9900 | 9591 | 8867 | 8095 | 5956 | 2517 |      |
|    | 9  |      |      |      |      | 9994 | 9974 | 9861 | 9520 | 9081 | 7553 | 4119 |      |
|    | 10 |      |      |      |      | 9999 | 9994 | 9961 | 9829 | 9624 | 8725 | 5881 |      |
|    | 11 |      |      |      |      |      | 9999 | 9991 | 9949 | 9870 | 9435 | 7483 |      |
|    | 12 |      |      |      |      |      |      | 9998 | 9987 | 9963 | 9790 | 8684 |      |
|    | 13 |      |      |      |      |      |      |      | 9997 | 9991 | 9935 | 9423 |      |
|    | 14 |      |      |      |      |      |      |      |      | 9998 | 9984 | 9793 |      |
| 15 |    |      |      |      |      |      |      |      |      | 9997 | 9941 |      |      |
| 16 |    |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 9987 |      |      |
| 17 |    |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 9998 |      |      |

nicht aufgeführte Werte sind gleich 1,0000 (bei Rundung auf vier Dezimalstellen)

Es gilt:  $P_{n;p}(X = k) = P_{n;p}(X \leq k) - P_{n;p}(X \leq k - 1)$

Für  $p \geq 0,5$  gilt:  $P_{n;p}(X \leq k) = 1 - P_{n;1-p}(X \leq n - k - 1)$

**Summierte Binomialverteilung:**  $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

| n  | k  | p    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|    |    | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 1/6  | 0,2  | 0,25 | 0,3  | 1/3  | 0,4  | 0,5  |      |
| 25 | 0  | 0,   | 6035 | 2774 | 0718 | 0105 | 0038 | 0008 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 |
|    | 1  |      | 9114 | 6424 | 2712 | 0629 | 0274 | 0070 | 0016 | 0005 | 0001 | 0000 |
|    | 2  |      | 9868 | 8729 | 5371 | 1887 | 982  | 0321 | 0090 | 0035 | 0004 | 0000 |
|    | 3  |      | 9986 | 9659 | 7636 | 3816 | 2340 | 0962 | 0332 | 0149 | 0024 | 0001 |
|    | 4  |      | 9999 | 9928 | 9020 | 5937 | 4207 | 2137 | 0905 | 0462 | 0095 | 0005 |
|    | 5  |      |      | 9988 | 9666 | 7720 | 6167 | 3783 | 1935 | 1120 | 0294 | 0020 |
|    | 6  |      |      | 9998 | 9905 | 8908 | 7800 | 5611 | 3407 | 2215 | 0736 | 0073 |
|    | 7  |      |      |      | 9977 | 9553 | 8909 | 7265 | 5118 | 3703 | 1536 | 0216 |
|    | 8  |      |      |      | 9995 | 9843 | 9532 | 8506 | 6769 | 5376 | 2735 | 0539 |
|    | 9  |      |      |      | 9999 | 9953 | 9827 | 9287 | 8106 | 6956 | 4246 | 1148 |
|    | 10 |      |      |      |      | 9988 | 9944 | 9703 | 9022 | 8220 | 5858 | 2122 |
|    | 11 |      |      |      |      | 9997 | 9985 | 9893 | 9558 | 9082 | 7323 | 3450 |
| 12 |    |      |      |      | 9999 | 9996 | 9966 | 9825 | 9585 | 8462 | 5000 |      |
| 13 |    |      |      |      |      | 9999 | 9991 | 9940 | 9836 | 9222 | 6550 |      |
| 14 |    |      |      |      |      |      | 9998 | 9982 | 9944 | 9656 | 7878 |      |
| 15 |    |      |      |      |      |      |      | 9995 | 9984 | 9868 | 8852 |      |
| 16 |    |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9996 | 9957 | 9461 |      |
| 17 |    |      |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9988 | 9784 |      |
| 18 |    |      |      |      |      |      |      |      |      | 9997 | 9927 |      |
| 19 |    |      |      |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9980 |      |
| 20 |    |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 9995 |      |
| 21 |    |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 9999 |      |
| 50 | 0  | 0,   | 3642 | 0769 | 0052 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
|    | 1  |      | 7358 | 2794 | 0338 | 0012 | 0002 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
|    | 2  |      | 9216 | 5405 | 1117 | 0066 | 0013 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
|    | 3  |      | 9822 | 7604 | 2503 | 0238 | 0057 | 0005 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
|    | 4  |      | 9968 | 8964 | 4312 | 0643 | 0185 | 0021 | 0002 | 0000 | 0000 | 0000 |
|    | 5  |      | 9995 | 9622 | 6161 | 1388 | 0480 | 0070 | 0007 | 0001 | 0000 | 0000 |
|    | 6  |      | 9999 | 9882 | 7702 | 2506 | 1034 | 0194 | 0025 | 0005 | 0000 | 0000 |
|    | 7  |      |      | 9968 | 8779 | 3911 | 1904 | 0453 | 0073 | 0017 | 0001 | 0000 |
|    | 8  |      |      | 9992 | 9421 | 5421 | 3073 | 0916 | 0183 | 0050 | 0002 | 0000 |
| 9  |    |      | 9998 | 9755 | 6830 | 4437 | 1637 | 0402 | 0127 | 0008 | 0000 |      |

nicht aufgeführte Werte sind gleich 1,0000 (bei Rundung auf vier Dezimalstellen)

Es gilt:  $P_{n;p}(X = k) = P_{n;p}(X \leq k) - P_{n;p}(X \leq k - 1)$

Für  $p \geq 0,5$  gilt:  $P_{n;p}(X \leq k) = 1 - P_{n;1-p}(X \leq n - k - 1)$

# Gestalte die Zukunft Studiere an der RPTU\*



---

> 160 Studiengänge

---

> 300 Professorinnen & Professoren

---

> 20.000 Studierende

---

An der RPTU in Kaiserslautern und  
Landau wird Zukunft gemacht.  
Genau der richtige Ort  
für dein Studium.

Erfahre mehr unter  
[rptu.de](http://rptu.de)

R  
TU  
P  
Rheinland-Pfälzische  
Technische Universität  
Kaiserslautern  
Landau

 TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
KAISERSLAUTERN

 UNIVERSITÄT  
KOBLENZ · LANDAU

\*Am 1. Januar 2023 fusionieren die Technische Universität Kaiserslautern und die Universität in Landau zur Rheinland-Pfälzischen Technischen Universität Kaiserslautern-Landau. Mit über 20.000 Studierenden und mehr als 300 Professor:innen ist die RPTU die zweitgrößte akademische Einrichtung des Landes.

**Summierte Binomialverteilung:**  $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

| n  | k  | p    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|    |    | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 1/6  | 0,2  | 0,25 | 0,3  | 1/3  | 0,4  | 0,5  |
| 50 | 10 |      |      | 9906 | 7986 | 5836 | 2622 | 0789 | 0284 | 0022 | 0000 |
|    | 11 |      |      | 9968 | 8827 | 7107 | 3816 | 1390 | 0570 | 0057 | 0000 |
|    | 12 |      |      | 9990 | 9373 | 8139 | 5110 | 2229 | 1035 | 0133 | 0002 |
|    | 13 |      |      | 9997 | 9693 | 8894 | 6370 | 3279 | 1715 | 0280 | 0005 |
|    | 14 |      |      | 9999 | 9862 | 9393 | 7481 | 4468 | 2612 | 0540 | 0013 |
|    | 15 |      |      |      | 9943 | 9692 | 8369 | 5692 | 3690 | 0955 | 0033 |
|    | 16 |      |      |      | 9978 | 9856 | 9017 | 6839 | 4868 | 1561 | 0077 |
|    | 17 |      |      |      | 9992 | 9937 | 9449 | 7822 | 6046 | 2369 | 0164 |
|    | 18 |      |      |      | 9997 | 9975 | 9713 | 8594 | 7126 | 3356 | 0325 |
|    | 19 |      |      |      | 9999 | 9991 | 9861 | 9152 | 8036 | 4465 | 0595 |
|    | 20 |      |      |      |      | 9997 | 9937 | 9522 | 8741 | 5610 | 1013 |
|    | 21 |      |      |      |      | 9999 | 9974 | 9749 | 9244 | 6701 | 1611 |
|    | 22 |      |      |      |      |      | 9990 | 9877 | 9576 | 7660 | 2399 |
|    | 23 |      |      |      |      |      | 9996 | 9944 | 9778 | 8438 | 3359 |
|    | 24 |      |      |      |      |      | 9999 | 9976 | 9892 | 9022 | 4439 |
|    | 25 |      |      |      |      |      |      | 9991 | 9951 | 9427 | 5561 |
|    | 26 |      |      |      |      |      |      | 9997 | 9979 | 9686 | 6641 |
|    | 27 |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9992 | 9840 | 7601 |
|    | 28 |      |      |      |      |      |      |      | 9997 | 9924 | 8389 |
|    | 29 |      |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9966 | 8987 |
|    | 30 |      |      |      |      |      |      |      |      | 9986 | 9405 |
|    | 31 |      |      |      |      |      |      |      |      | 9995 | 9675 |
|    | 32 |      |      |      |      |      |      |      |      | 9998 | 9836 |
|    | 33 |      |      |      |      |      |      |      |      | 9999 | 9923 |
|    | 34 |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 9967 |
|    | 35 |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 9987 |
|    | 36 |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 9995 |
|    | 37 |      |      |      |      |      |      |      |      |      | 9998 |

nicht aufgeführte Werte sind gleich 1,0000 (bei Rundung auf vier Dezimalstellen)

Es gilt:  $P_{n;p}(X = k) = P_{n;p}(X \leq k) - P_{n;p}(X \leq k - 1)$

Für  $p \geq 0,5$  gilt:  $P_{n;p}(X \leq k) = 1 - P_{n;1-p}(X \leq n - k - 1)$

Standardnormalverteilung - Verteilungsfunktion  $\Phi(z)$ 

| $z$ |    | ..0  | ..1  | ..2  | ..3  | ..4  | ..5  | ..6  | ..7  | ..8  | ..9  |
|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0,0 | 0, | 5000 | 5040 | 5080 | 5120 | 5160 | 5199 | 5239 | 5279 | 5319 | 5359 |
| 0,1 |    | 5398 | 5438 | 5478 | 5517 | 5557 | 5596 | 5636 | 5675 | 5714 | 5753 |
| 0,2 |    | 5793 | 5832 | 5871 | 5910 | 5948 | 5987 | 6026 | 6064 | 6103 | 6141 |
| 0,3 |    | 6179 | 6217 | 6255 | 6293 | 6331 | 6368 | 6406 | 6443 | 6480 | 6517 |
| 0,4 |    | 6554 | 6591 | 6628 | 6664 | 6700 | 6736 | 6772 | 6808 | 6844 | 6879 |
| 0,5 |    | 6915 | 6950 | 6985 | 7019 | 7054 | 7088 | 7123 | 7157 | 7190 | 7224 |
| 0,6 |    | 7257 | 7291 | 7324 | 7357 | 7389 | 7422 | 7454 | 7486 | 7517 | 7549 |
| 0,7 |    | 7580 | 7611 | 7642 | 7673 | 7704 | 7734 | 7764 | 7794 | 7823 | 7852 |
| 0,8 |    | 7881 | 7910 | 7939 | 7967 | 7995 | 8023 | 8051 | 8078 | 8106 | 8133 |
| 0,9 |    | 8159 | 8186 | 8212 | 8238 | 8264 | 8289 | 8315 | 8340 | 8365 | 8389 |
| 1,0 | 0, | 8413 | 8438 | 8461 | 8485 | 8508 | 8531 | 8554 | 8577 | 8599 | 8621 |
| 1,1 |    | 8643 | 8665 | 8686 | 8708 | 8729 | 8749 | 8770 | 8790 | 8810 | 8830 |
| 1,2 |    | 8849 | 8869 | 8888 | 8907 | 8925 | 8944 | 8962 | 8980 | 8997 | 9015 |
| 1,3 |    | 9032 | 9049 | 9066 | 9082 | 9099 | 9115 | 9131 | 9147 | 9162 | 9177 |
| 1,4 |    | 9192 | 9207 | 9222 | 9236 | 9251 | 9265 | 9279 | 9292 | 9306 | 9319 |
| 1,5 |    | 9332 | 9345 | 9357 | 9370 | 9382 | 9394 | 9406 | 9418 | 9429 | 9441 |
| 1,6 |    | 9452 | 9463 | 9474 | 9484 | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1,7 |    | 9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1,8 |    | 9641 | 9649 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1,9 |    | 9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9761 | 9767 |
| 2,0 | 0, | 9772 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2,1 |    | 9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2,2 |    | 9861 | 9864 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2,3 |    | 9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2,4 |    | 9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2,5 |    | 9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2,6 |    | 9953 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2,7 |    | 9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2,8 |    | 9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2,9 |    | 9981 | 9982 | 9982 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3,0 | 0, | 9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |
| 3,1 |    | 9990 | 9991 | 9991 | 9991 | 9992 | 9992 | 9992 | 9992 | 9993 | 9993 |
| 3,2 |    | 9993 | 9993 | 9994 | 9994 | 9994 | 9994 | 9994 | 9995 | 9995 | 9995 |
| 3,3 |    | 9995 | 9995 | 9995 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9996 | 9997 |
| 3,4 |    | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9997 | 9998 |

Für  $z \geq 3,90$  gilt:  $\Phi(z) = 1,0000$  (bei Rundung auf vier Dezimalstellen)

Es gilt:  $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Standardnormalverteilung - Quantile  $z_p$ 

| $p$    | $z_p$   | $p$    | $z_p$   | $p$    | $z_p$  |
|--------|---------|--------|---------|--------|--------|
| 0,0001 | -3,7190 | 0,2750 | -0,5978 | 0,7500 | 0,6745 |
| 0,0005 | -3,2905 | 0,3000 | -0,5244 | 0,7750 | 0,7554 |
| 0,0010 | -3,0902 | 0,3250 | -0,4538 | 0,8000 | 0,8416 |
| 0,0050 | -2,5758 | 0,3500 | -0,3853 | 0,8250 | 0,9346 |
| 0,0100 | -2,3263 | 0,3750 | -0,3186 | 0,8500 | 1,0364 |
| 0,0200 | -2,0537 | 0,4000 | -0,2533 | 0,8750 | 1,1503 |
| 0,0250 | -1,9600 | 0,4250 | -0,1891 | 0,9000 | 1,2816 |
| 0,0300 | -1,8808 | 0,4500 | -0,1257 | 0,9250 | 1,4395 |
| 0,0400 | -1,7507 | 0,4750 | -0,0627 | 0,9400 | 1,5548 |
| 0,0500 | -1,6449 | 0,5000 | 0,0000  | 0,9500 | 1,6449 |
| 0,0600 | -1,5548 | 0,5250 | 0,0627  | 0,9600 | 1,7507 |
| 0,0750 | -1,4395 | 0,5500 | 0,1257  | 0,9700 | 1,8808 |
| 0,1000 | -1,2816 | 0,5750 | 0,1891  | 0,9750 | 1,9600 |
| 0,1250 | -1,1503 | 0,6000 | 0,2533  | 0,9800 | 2,0537 |
| 0,1500 | -1,0364 | 0,6250 | 0,3186  | 0,9900 | 2,3263 |
| 0,1750 | -0,9346 | 0,6500 | 0,3853  | 0,9950 | 2,5758 |
| 0,2000 | -0,8416 | 0,6750 | 0,4538  | 0,9990 | 3,0902 |
| 0,2250 | -0,7554 | 0,7000 | 0,5244  | 0,9995 | 3,2905 |
| 0,2500 | -0,6745 | 0,7250 | 0,5978  | 0,9999 | 3,7190 |





Nimm deine  
Zukunft in  
die Hand und  
bewirb dich!

# Die besten Influencer arbeiten im Buchhandel.

- **Handelsfachwirt (3 IHK-Abschlüsse) (m/w/d)**
- **Buchhändler (m/w/d)**
- **Kaufleute im Einzelhandel (m/w/d)**
- **Fachinformatiker für Systemintegration (m/w/d)**
- **Duale Studenten BWL (m/w/d)**



Scan & More

Weitere Informationen zu  
unseren Ausbildungsplätzen  
findest du unter  
[thalia.de/ausbildung](https://thalia.de/ausbildung)

 **Thalia**

# Stichwortverzeichnis

|                                  |  |                                    |  |
|----------------------------------|--|------------------------------------|--|
| <b>A</b>                         |  | Aussagenlogik..... 85              |  |
| Abhängigkeit, lineare..... 7     |  | Axiome von Kolmogorov..... 66      |  |
| Ablehnungsbereich..... 81        |  | <b>B</b>                           |  |
| Ableitung(en)                    |  | Basis eines Vektorraumes..... 7    |  |
| Regeln..... 32                   |  | Bayes, Formel von..... 69          |  |
| Schreibweisen..... 31            |  | bedingte Wahrscheinlichkeit... 68  |  |
| spezielle..... 32                |  | Bernoulli                          |  |
| Abschätzbarkeit..... 40          |  | Experiment..... 76                 |  |
| absolute Häufigkeit..... 61, 66  |  | Kette..... 76                      |  |
| Abstand                          |  | Verteilung..... 76                 |  |
| Gerade-parallele Ebene.... 22    |  | beschränktes Wachstum..... 48      |  |
| parallele Ebenen..... 22         |  | Beschränktheit..... 23             |  |
| parallele Geraden..... 22        |  | Betrag eines Vektors..... 10       |  |
| Punkt-Ebene..... 21              |  | bijektiv..... 27                   |  |
| Punkt-Gerade..... 22             |  | Bild einer Folge..... 23           |  |
| von zwei Punkten..... 21         |  | Binomialkoeffizient..... 70        |  |
| windschiefe Geraden..... 22      |  | Binomialtest..... 84               |  |
| Addition von Matrizen..... 54    |  | Binomialverteilung                 |  |
| Additionssatz..... 68            |  | Definition..... 75                 |  |
| Additivität..... 66              |  | Tabellen..... 89                   |  |
| Adjunkte..... 56                 |  | binomischer Satz..... 70           |  |
| Alternativgesetz..... 11         |  | Bogenlänge..... 46                 |  |
| Alternativhypothese..... 81      |  | <b>C</b>                           |  |
| Analysis..... 23                 |  | charakteristische Gleichung.... 47 |  |
| Anfangsglied einer Folge..... 23 |  | Cramersche Regel..... 59           |  |
| arithmetische Folge..... 24      |  | <b>D</b>                           |  |
| arithmetisches Mittel..... 61    |  | De Moivre-Laplace..... 79          |  |
| Assoziativgesetz..... 6          |  | Definitionslücke                   |  |
| Asymptote                        |  | allgemein..... 34                  |  |
| lineare..... 36                  |  | stetig behebbare..... 34           |  |
| nichtlineare..... 36             |  |                                    |  |
| vertikale..... 34                |  |                                    |  |





|                                    |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| Hypergeometrische Verteilung .. 75 | <b>K</b>                          |
| Hypothesentest                     | $k\sigma$ -Regeln..... 78         |
| auf den Anteilswert ..... 84       | Keplersche Fassregel ..... 43     |
| auf den Erwartungswert... 85       | Kettenregel ..... 32              |
| Fehlerarten ..... 82               | Koeffizientendeterminante..... 59 |
| linksseitiger ..... 82, 84         | Koeffizientenmatrix ..... 58      |
| rechtsseitiger ..... 84, 85        | kollinear ..... 7                 |
| Vorgehen ..... 81                  | Kolmogorov ..... 66               |
| zweiseitiger..... 82, 84           | Kombinationen ..... 71            |
|                                    | Kombinatorik ..... 70             |
| <b>I</b>                           | Kommutativgesetz..... 6, 10       |
| Imaginärteil..... 86               | komplanar ..... 7                 |
| Implikation ..... 85               | komplexe Zahlen..... 86           |
| inhomogen                          | Komponente einer Matrix ..... 50  |
| Differenzialgleichung ..... 46     | Komponentendarstellung..... 8     |
| Gleichungssystem ..... 58          | Konfidenzintervall                |
| injektiv ..... 27                  | Definition..... 80                |
| Integral(e)                        | für den Erwartungswert... 80      |
| bestimmtes (Definition) .... 38    | für eine Anzahl ..... 81          |
| bestimmtes (Eigenschaften) 40      | konjugierte komplexe Zahl .... 86 |
| spezielle ..... 41                 | Konjunktion ..... 85              |
| unbestimmtes ..... 38              | konkav ..... 37                   |
| Integralfunktion ..... 38          | Konstantenvektor ..... 58         |
| Integralrechnung ..... 38          | Konvergenz einer Folge..... 26    |
| Integration                        | konvex ..... 37                   |
| durch Substitution ..... 40        | Koordinatendarstellung ..... 8    |
| logarithmische ..... 41            | Koordinatengleichung              |
| partielle ..... 40                 | einer Ebene..... 14               |
| Integrationskonstante ..... 38     | einer Geraden..... 13             |
| Interquartilsabstand ..... 64      | einer Kugel ..... 16              |
| Intervalladditivität ..... 40      | Korrelationskoeffizient ..... 64  |
| inverse Matrix ..... 52            | Kovarianz..... 64                 |
| inverses Element ..... 6           | Krümmungskreis..... 37            |
| Irrtumswahrscheinlichkeit ..... 81 | Krümmungsverhalten ..... 37       |
|                                    | Kreuzprodukt..... 11              |





|   |        |
|---|--------|
| <b>Q</b>  |        |
| Quadratische Matrix . . . . .                   | 51     |
| Quantile der Standardnormalverteilung . . . . . | 96     |
| Quotientenregel . . . . .                       | 32     |
| <b>R</b>  |        |
| Rang einer Matrix . . . . .                     | 50     |
| Realteil . . . . .                              | 86     |
| Rechtskurve . . . . .                           | 37     |
| rechtsseitiger Test . . . . .                   | 84, 85 |
| Rechtssystem . . . . .                          | 11     |
| Regel   |        |
| von l'Hospital . . . . .                        | 28     |
| von Sarrus . . . . .                            | 56     |
| Regressionsgerade . . . . .                     | 65     |
| Regula falsi . . . . .                          | 33     |
| Reihe   |        |
| Definition . . . . .                            | 23     |
| unendliche . . . . .                            | 23     |
| unendliche geometrische . . . . .               | 24     |
| rekursive Bildungsvorschrift . . . . .          | 24     |
| relative Häufigkeit . . . . .                   | 61, 66 |
| Repräsentant eines Vektors . . . . .            | 7      |
| Richtungsvektor . . . . .                       | 12, 13 |
| Rotationskörper . . . . .                       | 44     |
| <b>S</b>  |        |
| Sarrus . . . . .                                | 56     |
| Sattelpunkt . . . . .                           | 37     |
| Satz  |        |
| binomischer . . . . .                           | 70     |
| von Taylor . . . . .                            | 33     |
| schiefsymmetrische Matrix . . . . .             | 51     |
| Schnitt zweier Kurven . . . . .                 | 38     |
| Schnittkreis . . . . .                          | 20     |
| Schnittpunkt                                    |        |
| von Gerade und Ebene . . . . .                  | 18     |
| von Gerade und Kugel . . . . .                  | 18     |
| von zwei Geraden . . . . .                      | 17     |
| von zwei Kugeln . . . . .                       | 20     |
| Schnittwinkel                                   |        |
| zweier Funktionen . . . . .                     | 38     |
| zwischen Gerade/Ebene . . . . .                 | 21     |
| zwischen Vektoren . . . . .                     | 20     |
| zwischen zwei Ebenen . . . . .                  | 21     |
| zwischen zwei Geraden . . . . .                 | 21     |
| Schranke . . . . .                              | 23     |
| Sekantenformel . . . . .                        | 42     |
| Sekantenverfahren . . . . .                     | 33     |
| sicheres Ereignis . . . . .                     | 65     |
| Signifikanzniveau . . . . .                     | 81     |
| Simpsonsche Regel . . . . .                     | 43     |
| Skalarprodukt . . . . .                         | 10     |
| Spaltenvektor . . . . .                         | 50     |
| Spannvektoren . . . . .                         | 13     |
| Spannweite . . . . .                            | 64     |
| Spatprodukt . . . . .                           | 11     |
| Stützvektor . . . . .                           | 12, 13 |
| Staffelform . . . . .                           | 59     |
| Stammfunktion(en)                               |        |
| Definition . . . . .                            | 38     |
| spezielle . . . . .                             | 41     |
| Standardabweichung                              |        |
| einer Zufallsvariablen . . . . .                | 74     |
| empirische . . . . .                            | 62     |
| Standardisierung . . . . .                      | 78     |
| Standardnormalverteilung                        |        |
| Definition . . . . .                            | 78     |
| Tabelle . . . . .                               | 95     |





|   |    |  |        |
|---|----|--|--------|
| Normal- . . . . .                       | 76 | Winkel (siehe Schnittwinkel) . . . . . | 20     |
| Standardnormal- . . . . .               | 78 |  |        |
| Verteilungsfunktion . . . . .           | 72 | <b>Z</b>                               |        |
| Verwerfungsbereich . . . . .            | 81 | Zählerdeterminante . . . . .           | 59     |
| Volumen eines Spates . . . . .          | 11 | Zahlenfolge . . . . .                  | 23     |
| Vorzeichenwechsel . . . . .             | 34 | Zeilenvektor . . . . .                 | 50     |
|   |    | Zentraler Grenzwertsatz . . . . .      | 79     |
| <b>W</b>                                |    | Zentralwert . . . . .                  | 62     |
| Wachstum                                |    | Zielmenge . . . . .                    | 27     |
| beschränktes . . . . .                  | 48 | Zufallsexperiment                      |        |
| exponentielles . . . . .                | 48 | Definition . . . . .                   | 65     |
| lineares . . . . .                      | 48 | mehrstufiges . . . . .                 | 69     |
| logistisches . . . . .                  | 48 | Zufallsgröße . . . . .                 | 72     |
| Wahrheitswertetafel . . . . .           | 86 | Zufallsvariable                        |        |
| Wahrscheinlichkeit                      |    | Definition . . . . .                   | 72     |
| bedingte . . . . .                      | 68 | diskrete . . . . .                     | 72     |
| totale . . . . .                        | 69 | Erwartungswert . . . . .               | 74     |
| Wahrscheinlichkeitsfunktion 66, 72      |    | Standardabweichung . . . . .           | 74     |
| Wahrscheinlichkeitstabellen . . . . .   | 89 | stetige . . . . .                      | 72     |
| Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . . . | 72 | Varianz . . . . .                      | 74     |
| Wendepunkt . . . . .                    | 37 | Zweipunktegleichung . . . . .          | 12     |
| Wertemenge . . . . .                    | 27 | zweiseitiger Test . . . . .            | 82, 84 |
| windschief . . . . .                    | 17 | Zwischenwertsatz . . . . .             | 30     |



## UNSERE FORMEL FÜR DICH

$$f = i + p * e^x$$

f

Frankfurt School

i

international

p

praxisnah

e

erfolgreich

x

Du?

- Business Administration
- Computational Business Analytics
- Management, Philosophy & Economics



Erfahre mehr



Frankfurt School

**h\_da**



**h-da.de/  
studium**

# **RECHNE MIT UNS.**

**Nicht nur in Mathe.**

**Bei uns kannst du aus über 70 praxis-orientierten Studiengängen wählen.**

**Hochschule Darmstadt.**



